BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2019

Mathématiques - série ES

Enseignement de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **7**

SUJET

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte une annexe située en page 9, à rendre avec la copie.

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.
Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les événements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à 0,41.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
   Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site internet du musée.
   D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur ? Justifier la réponse.

Partie B

On s'intéresse désormais à la fréquentation de la boutique du musée.
On note T la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe la durée en minutes passée dans la boutique.
Une étude statistique a montré que la variable aléatoire T suit la loi normale de moyenne $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un visiteur reste moins de six minutes dans la boutique ?
2. Calculer $P(6 \leq T \leq 14)$.

3. Déterminer une valeur approchée au dixième du nombre réel a tel que $P(T \geq a) = 0{,}25$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Les recettes obtenues par la boutique ne sont pas jugées satisfaisantes ; celle-ci est donc réaménagée. Une étude menée suite à ce réaménagement montre que 25 % des visiteurs passent désormais au moins 15 minutes dans la boutique.
Pour s'en assurer le gérant de la boutique constitue un échantillon aléatoire de 720 visiteurs. Il constate que 161 d'entre eux sont restés 15 minutes ou plus.

Cet échantillon confirme-t-il les résultats de l'étude ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Un constructeur automobile commercialise un nouveau véhicule. Afin de le faire connaître, une campagne publicitaire est organisée. On étudie l'impact de cette campagne publicitaire dans une certaine région.

1. On montre la publicité à 3 000 habitants de cette région. Parmi eux, 817 la trouvent attractive. Un intervalle de confiance au seuil de 0,95 de la proportion d'habitants de la région trouvant que la publicité est attractive est (les bornes ont été arrondies à 10^{-3}) :

A. [0,271 ; 0,273]	**B.** [0,211 ; 0,333]
C. [0,254 ; 0,333]	**D.** [0,254 ; 0,291]

2. Dans une ville de la région, sur une population de 4 200 habitants, 36 % ont pris connaissance de la publicité lors de la première semaine de la campagne.
Le nombre d'habitants de cette ville ayant pris connaissance de la publicité lors de la première semaine de la campagne est :

A. 2 688	**B.** 1 512
C. 1 167	**D.** 4 164

3. Le premier jour de la campagne publicitaire, 150 habitants de la région ont pris connaissance de la publicité. Chaque jour, le nombre d'habitants de la région ayant pris connaissance de la publicité est multiplié par 2.
On souhaite écrire un algorithme qui détermine le nombre de jours au bout desquels au moins 30 000 habitants de la région auront pris connaissance de la publicité.

Parmi ces algorithmes, quel est celui dont le contenu de la variable N, après exécution de l'algorithme, répond au problème ?

A.
$\cancel{A \leftarrow 150}$
$\cancel{N \leftarrow 1}$
Tant que $A < 30\,000$
    $A \leftarrow 2A$
Fin Tant que
$N \leftarrow N + 1$
	B.
	$\cancel{A \leftarrow 150}$
	$\cancel{N \leftarrow 1}$
	Tant que $A < 30\,000$
	    $A \leftarrow 2A$
	    $N \leftarrow N + 1$
	Fin Tant que

C.
$\cancel{A \leftarrow 150}$
$\cancel{N \leftarrow 1}$
Tant que $A < 30\,000$
    $A \leftarrow 2A$
Fin Tant que
	D.
	$\cancel{A \leftarrow 150}$
	$\cancel{N \leftarrow 1}$
	~~Tant que~~ $\cancel{A > 30\,000}$
	    $\cancel{A \leftarrow 2A}$
	    $\cancel{N \leftarrow N + 1}$
	~~Fin Tant que~~

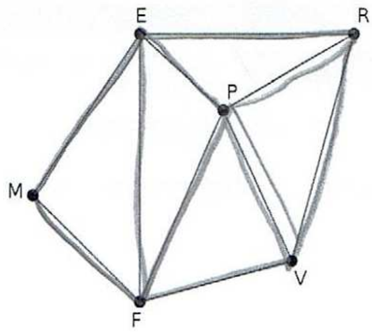
4. Dans une concession automobile de la région, le temps d'attente, exprimé en minutes, avant d'être reçu par un conseiller commercial peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 10]$.
Un visiteur se présente. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 5 minutes avant d'être reçu par un conseiller commercial ?

A. 0,4	**B.** 0,5
C. 4/9	**D.** 5/9

Exercice 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Un restaurateur se fournit auprès de 5 producteurs locaux. Le graphe ci-dessous représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs :



Légende
E : éleveur
F : fromager
M : maraîcher
P : pisciculteur
R : **restaurateur**
V : vigneron

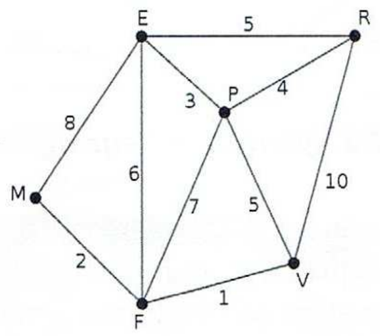
1.
a) Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.
b) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.

2. Est-il possible pour le restaurateur d'organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse. Si oui, préciser le point d'arrivée et proposer un tel parcours.

3. On appelle N la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
a) Déterminer la matrice N.
b) On donne la matrice $N^3 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 10 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 6 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer, en justifiant la réponse, le nombre de chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron.

4. Les arêtes du graphe sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètre, entre les différents lieux :



Le restaurateur doit se rendre chez le maraîcher en partant de chez lui. Quel est le plus court chemin pour effectuer ce trajet ? Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.

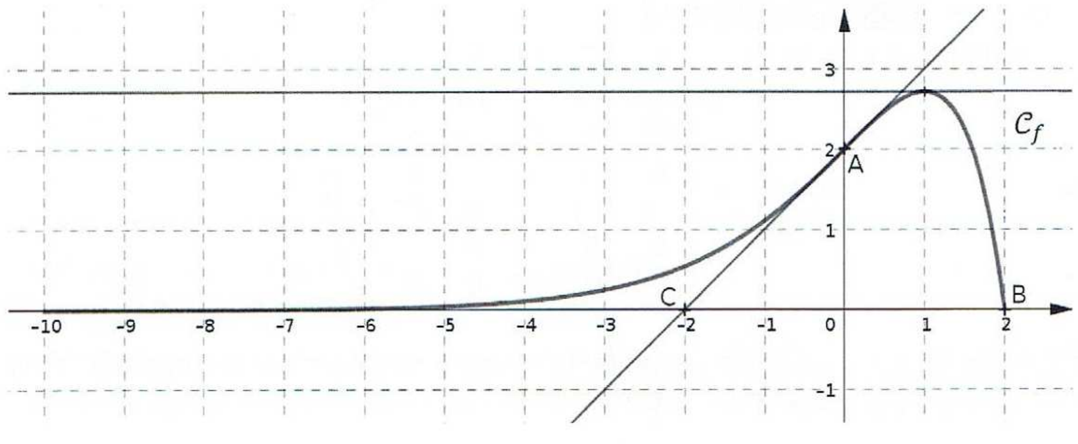
Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$. On a placé les points $\mathrm{A}(0\,;\,2)$, $\mathrm{B}(2\,;\,0)$ et $\mathrm{C}(-2\,;\,0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.

2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.

3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

7. On s'intéresse au nombre $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

a) Sur le graphique donné **en annexe située page 9 / 9 et à rendre avec la copie**, hachurer le domaine du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, est égale à I.

b) Donner un encadrement du nombre I par deux entiers consécutifs.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.

2.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

b) En déduire la valeur de $f'(1)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4.

a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$, puis donner une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

5. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant :

1	$f(x) := (2 - x) * exp(x)$
	$f(x) := (-x + 2)\mathrm{e}^{x}$
2	Simplifier(Dérivée(Dérivée($f(x)$)))
	$-x\ \mathrm{e}^{x}$

Utiliser le résultat du logiciel pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

6. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ par :

$$F(x) = (3 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

a) Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

b) En déduire la valeur exacte et une valeur approchée au centième du nombre $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.