

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

- 1) Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
- 2) Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
- 3) Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D , suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) On sait que $P(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ .
- 2) On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ . Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

- 1) Soit $X = \frac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
- 2) On sait que $P(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe \mathcal{C}_f et la droite Δ , les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
Laisser les tracés explicatifs apparents.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100} .

EXERCICE 3 (3 points)

(commun à tous les candidats)

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

EXERCICE 4 (5 points)

(réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n , exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1^{er} janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B .
- 2) Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
- 3) On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.
 - a) Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ .
 - b) Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP .
Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.

- 4) On pose pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.
 - a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = AV_n$.
 - b) Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n , donner l'expression de V_n en fonction de A , n et V_0 .
- 5) Soit n un entier naturel. On admet que

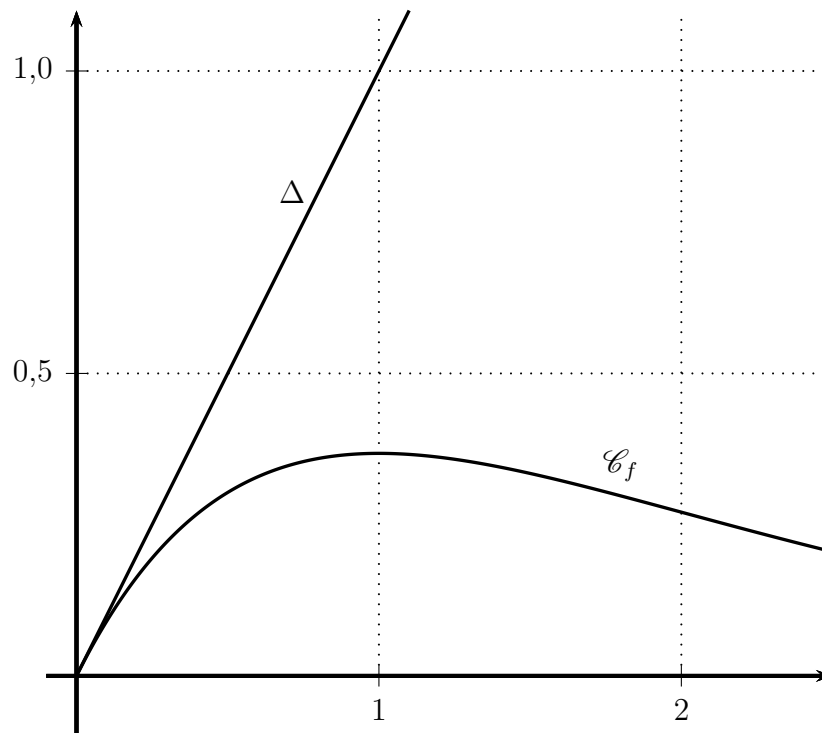
$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.
- b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n .
- c) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe, Exercice 2

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur S prend la valeur
Traitement :	Pour k variant de 1 à u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur Fin Pour Afficher