

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 7

*Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8,  
dont les annexes 1 et 2 pages 7 et 8 sont à rendre avec la copie.*

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (6 points)

### Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x$ .

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on définit sur  $]0 ; +\infty[$  la fonction  $g_a$  par  $g_a(x) = ax^2$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Gamma_a$  celle de la fonction  $g_a$  dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs du réel strictement positif  $a$ .

#### Partie A

On a construit en **annexe 1** (à rendre avec la copie) les courbes  $\mathcal{C}$ ,  $\Gamma_{0,05}$ ,  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\Gamma_{0,4}$ .

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs (à préciser) du réel  $a$ .

#### Partie B

Pour un réel  $a$  strictement positif, on considère la fonction  $h_a$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que  $x$  est l'abscisse d'un point  $M$  appartenant à l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  si et seulement si  $h_a(x) = 0$ .
2. a. On admet que la fonction  $h_a$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , et on note  $h'_a$  la dérivée de la fonction  $h_a$  sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction  $h_a$  est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de  $h'_a(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

$x$	$0$		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$		+	0	-	
$h_a(x)$		$-\infty$	$\frac{-1 - \ln(2a)}{2}$	$-\infty$	

- b. Rappeler la limite de  $\frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ . En déduire la limite de la fonction  $h_a$  en  $+\infty$ .  
On ne demande pas de justifier la limite de  $h_a$  en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = 0,1$ .
  - a. Justifier que, dans l'intervalle  $]0 ; \frac{1}{\sqrt{0,2}}]$ , l'équation  $h_{0,1}(x) = 0$  admet une unique solution.  
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle  $]\frac{1}{\sqrt{0,2}} ; +\infty[$ .
  - b. Quel est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{0,1}$  ?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2e}$ .
  - a. Déterminer la valeur du maximum de  $h_{\frac{1}{2e}}$ .
  - b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ . Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

## EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

### Partie A

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

On rappelle que, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note  $\mathbf{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$  est une primitive sur  $\mathbf{R}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

1. Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1).$$

2. En déduire que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

### Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'**annexe 2** (à rendre avec la copie) :

- Représenter la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
- Indiquer où se lit directement la valeur de  $\lambda$ .

2. On suppose que  $E(X) = 2$ .

- Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  ?
- Calculer la valeur de  $\lambda$ .
- Calculer  $P(X \leq 2)$ . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
- Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

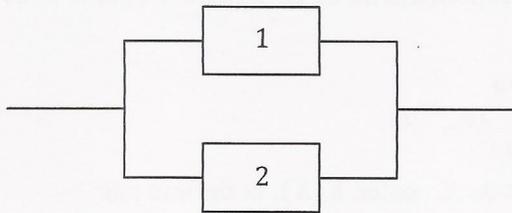
### Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2.

On note  $D_1$  l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note  $D_2$  l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants et que  $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$ .

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

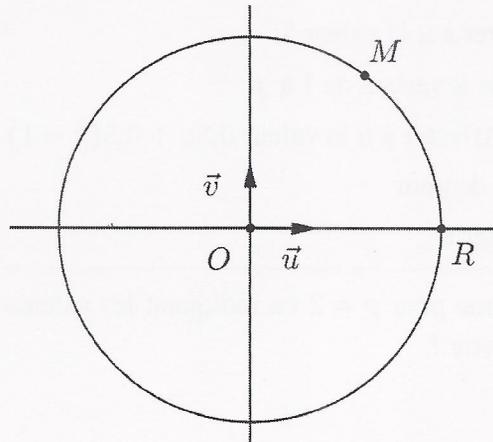
### EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

#### Partie A

On appelle  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  on a placé un point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , puis le point  $R$  intersection du cercle de centre  $O$  passant par  $M$  et du demi-axe  $[O ; \vec{u})$ .



1. Exprimer l'affixe du point  $R$  en fonction de  $z$ .
2. Soit le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{1}{2} \left( \frac{z + |z|}{2} \right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point  $M'$ .

#### Partie B

On définit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  par un premier terme  $z_0$  appartenant à  $\mathbb{C}$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  dépend du choix de  $z_0$ .

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que  $z_0$  n'est pas un nombre réel.
  - a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  ?
  - b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

## EXERCICE 4 (5 points)

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

#### Partie A

On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
<b>Entrée :</b>	Demander la valeur de $p$
<b>Traitement :</b>	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
<b>Sortie :</b>	Afficher $u$

Faire fonctionner cet algorithme pour  $p = 2$  en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

#### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  variant de 1 à  $p$ .
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi  $p = 4$ , on obtient les résultats suivants :

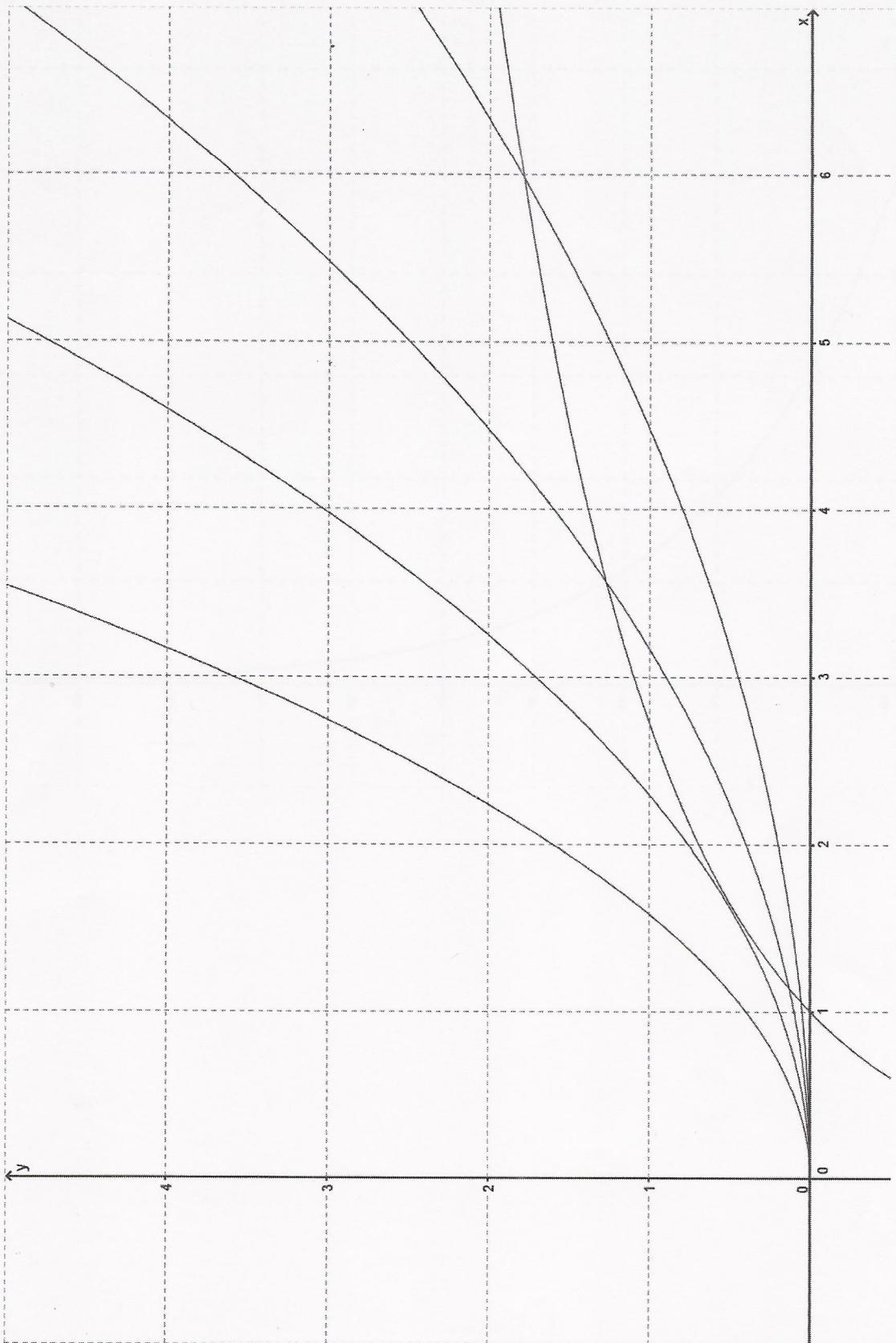
$n$	1	2	3	4
$u_n$	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite  $(u_n)$  est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$ .  
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?
4. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ .  
Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .
5. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$
6. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

# À RENDRE AVEC LA COPIE

## ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2

