

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

## MATHÉMATIQUES

Série S

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 7**

**Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.**

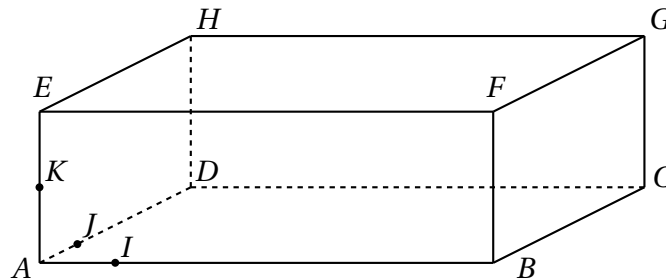
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

**EXERCICE 1 (3 points)**

On considère le pavé droit  $ABCDEFGH$  ci-dessous, pour lequel  $AB = 6$ ,  $AD = 4$  et  $AE = 2$ .

$I, J$  et  $K$  sont les points tels que  $\vec{AI} = \frac{1}{6} \vec{AB}$ ,  $\vec{AJ} = \frac{1}{4} \vec{AD}$ ,  $\vec{AK} = \frac{1}{2} \vec{AE}$ .



On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ .

1. Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(IJG)$ .
2. Déterminer une équation du plan  $(IJG)$ .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection  $L$  du plan  $(IJG)$  et de la droite  $(BF)$ .
4. Tracer la section du pavé  $ABCDEFGH$  par le plan  $(IJG)$ . Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe (à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.

### EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point  $M$  est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point  $M'$  associé.  
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $B$  le point d'affixe  $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ .  
Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont réels, tels que le point  $M'$  associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points  $A$  et  $B$  ainsi que l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

### EXERCICE 3 (3 points)

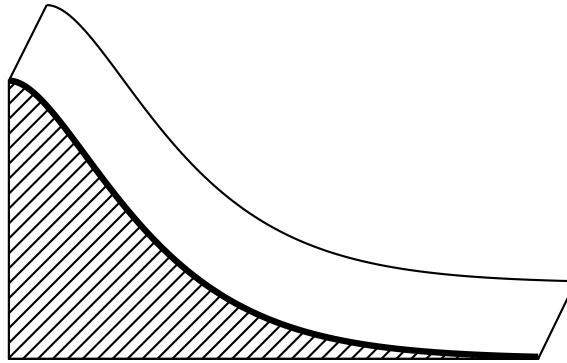
Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire  $X_1$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu_1 = 165$  cm et d'écart-type  $\sigma_1 = 6$  cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire  $X_2$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu_2 = 175$  cm et d'écart-type  $\sigma_2 = 11$  cm. Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2.
  - a) Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
  - b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

#### EXERCICE 4 (5 points)

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

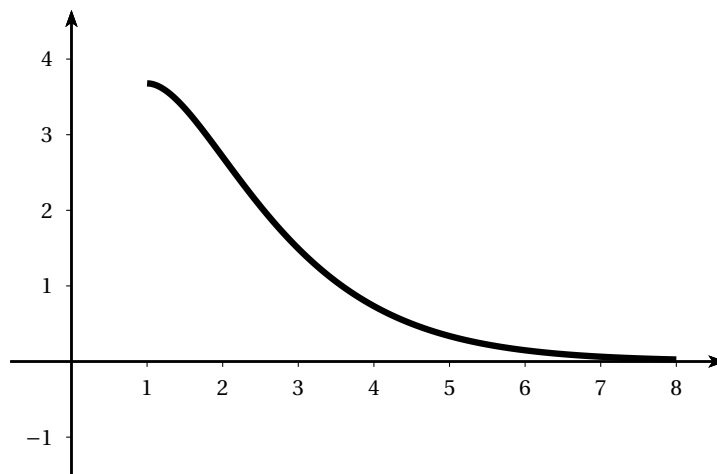
Voici ce schéma :



#### Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 8]$  par  $f(x) = (ax + b)e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels.

La courbe  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier  $b$ .
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier  $a$ .

#### Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction  $f$  introduite dans la partie A est définie pour tout réel  $x \in [1; 8]$  par  $f(x) = 10xe^{-x}$ .

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

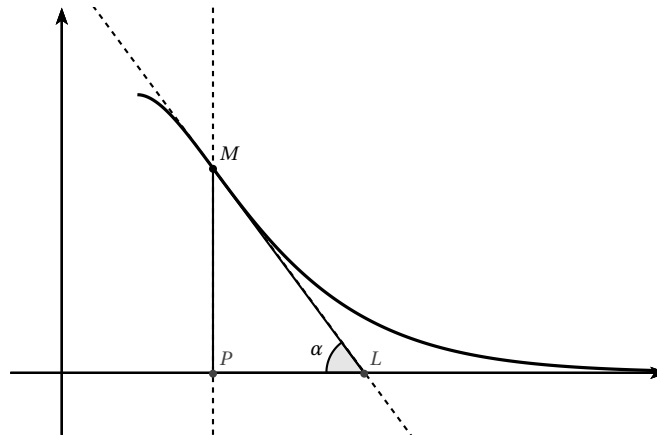
1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; 8]$  par  $g(x) = 10(-x - 1)e^{-x}$ . Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$ .
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

**Partie C Une contrainte à vérifier**

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}$ , d'abscisse différente de 1. On appelle  $\alpha$  l'angle aigu formé par la tangente en  $M$  à  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle  $\alpha$  soit inférieur à 55 degrés.

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 8]$ . On admet que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 8]$ ,  $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$ . Etudier les variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[1 ; 8]$ .
2. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $]1 ; 8]$  et soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}$ . Justifier que  $\tan \alpha = |f'(x)|$ .
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

### EXERCICE 5 (5 points)

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_1 = \ln(2)$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$ .

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

On définit ensuite la suite  $(S_n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de  $(S_n)$ .

#### Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de  $S_n$  pour une valeur de  $n$  choisie par l'utilisateur :

Variables :	$n, k$ entiers $S, v$ réels
Initialisation :	Saisir la valeur de $n$ $v$ prend la valeur ... $S$ prend la valeur ...
Traitement :	Pour $k$ variant de ... à ... faire ... prend la valeur ... ... prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher $S$

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de  $S_n$ . Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

$n$	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$S_n$	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite  $(S_n)$ .

#### Partie B Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = e^{v_n}$ .

1. Vérifier que  $u_1 = 2$  et que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ .
2. Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+1}{n}$ .

#### Partie C Étude de $(S_n)$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $v_n$  en fonction de  $u_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. Vérifier que  $S_3 = \ln(4)$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ . En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

# Annexe

À rendre avec la copie

## EXERCICE 1

