

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète
ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Partie A

Un industriel veut lancer sur le marché une gamme de produits spécialement conçus pour les gauchers. Auparavant il cherche à estimer la proportion de gauchers dans la population française. Une première étude portant sur un échantillon de 4 000 Français révèle que l'on dénombre 484 gauchers.

1) Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la proportion de gauchers dans la population française est (les bornes ont été arrondies à 10^{-3}) :

- a. [0,120 ; 0,122] b. [0,863 ; 0,895] c. [0,105 ; 0,137] d. [0,090 ; 0,152]

2) La taille n de l'échantillon que l'on doit choisir afin d'obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 ayant une amplitude de 0,01 est :

- a. $n = 15$ b. $n = 200$ c. $n = 10\ 000$ d. $n = 40\ 000$

Partie B

Des chercheurs ont conçu un test pour évaluer la rapidité de lecture d'élèves de CE2. Ce test consiste à chronométrer la lecture d'une liste de 20 mots. On a fait passer ce test à un très grand nombre d'élèves de CE2. On appelle X la variable aléatoire qui donne le temps en seconde mis par un élève de CE2 pour passer le test. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 13$.

3) La probabilité $p(19 \leq X \leq 45)$ arrondie au centième est :

- a. 0,50 b. 0,68 c. 0,84 d. 0,95

4) On note t la durée de lecture vérifiant $p(X \leq t) = 0,9$. La valeur de t arrondie à l'entier est :

- a. $t = 32$ s b. $t = 45$ s c. $t = 49$ s d. $t = 58$ s

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f .

Partie A

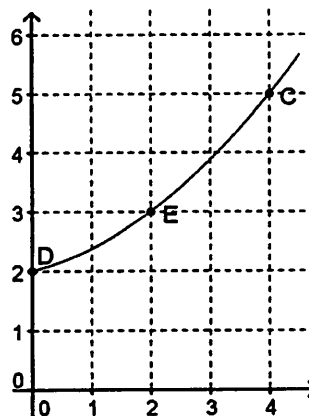
On cherche à déterminer la valeur des coefficients a , b et c .

1) a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

b) En déduire que le système précédent est équivalent à :

$$MX = R \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

et R une matrice colonne que l'on précisera.



2) On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a , b et c , en détaillant les calculs.

3) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.

1) a) Déterminer si le graphe est connexe.

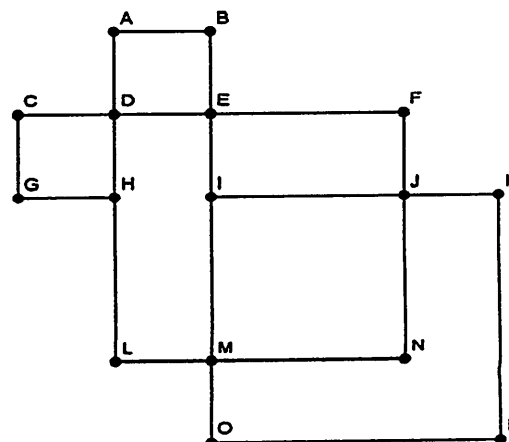
b) Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2) Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.



Commun à tous les candidats

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1^{er} janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1^{er} janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n , le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année 2004 + n . On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

- 1) Calculer l'effectif de cette population de singes :
 - a) au 1^{er} janvier 2005,
 - b) au 1^{er} janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.
- 3) Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^{er} janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000. Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

| | |
|---------------------|----------------------------|
| L1 : Variables | u un réel, n un entier |
| L2 : Initialisation | u prend la valeur 25 000 |
| L3 : | n prend la valeur 0 |
| L4 : Traitement | Tant que faire |
| L5 : | u prend la valeur |
| L6 : | n prend la valeur |
| L7 : | Fin Tant que |
| L8 : Sortie | Afficher n |

- 4) Montrer que la valeur de n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

Partie B

Au 1^{er} janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n , le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n . On a ainsi $v_0 = 5\,000$.

- 1) a) Calculer v_1 et v_2 .
 - b) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
- 2) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\,600$.
 - a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0 .
 - b) Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.
 - d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

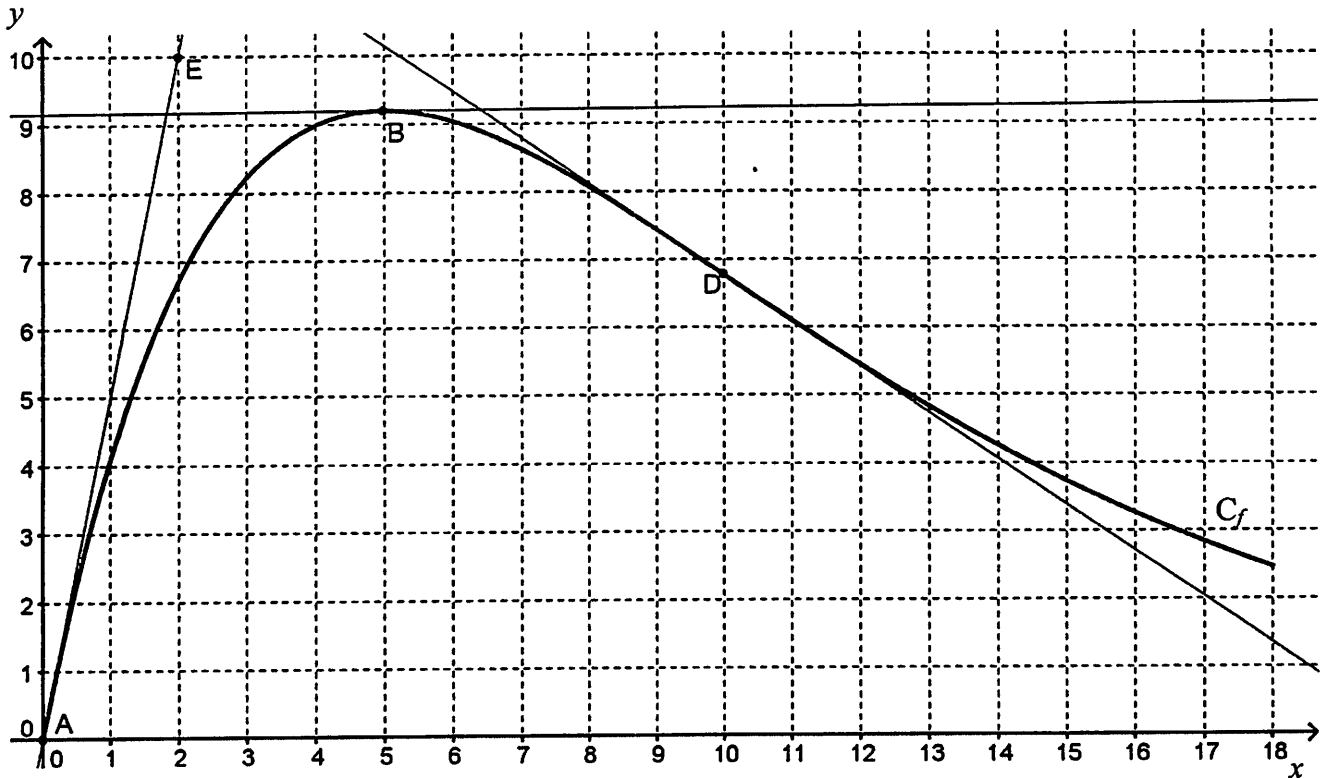
EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2 ; 10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1) Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.

2) On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie B

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative C_f a été tracée ci-dessus.

En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.
En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x -ième jour.

Ainsi, par exemple, le 10-ème jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 18]$ par $f(x) = 5x e^{-0,2x}$.

1) Montrer que $f'(x) = (5 - x) e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 18]$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 18]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 18]$.

3) Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

Partie C

1) On admet que la fonction F définie sur $[0 ; 18]$ par $F(x) = (-25x - 125) e^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f .

a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{10} f(x) dx$.

b) En déduire une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours. On arrondira le résultat à l'unité.

2) Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | <i>Deriver</i> [(5 - x) * exp(-0.2 * x)] |
| | $-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)$ |
| 2 | <i>Factoriser</i> $[-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)]$ |
| | $\frac{x - 10}{5} * \exp(-0.2 * x)$ |

Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.