

# BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2016

Épreuve :

**MATHÉMATIQUES**

**Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE**

**Spécialité : BIOTECHNOLOGIES**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

Coefficient : **4**

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

*Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.*

*Du papier millimétré sera mis à disposition des candidats.*

*Le candidat doit s'assurer que le sujet distribué est complet.*

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

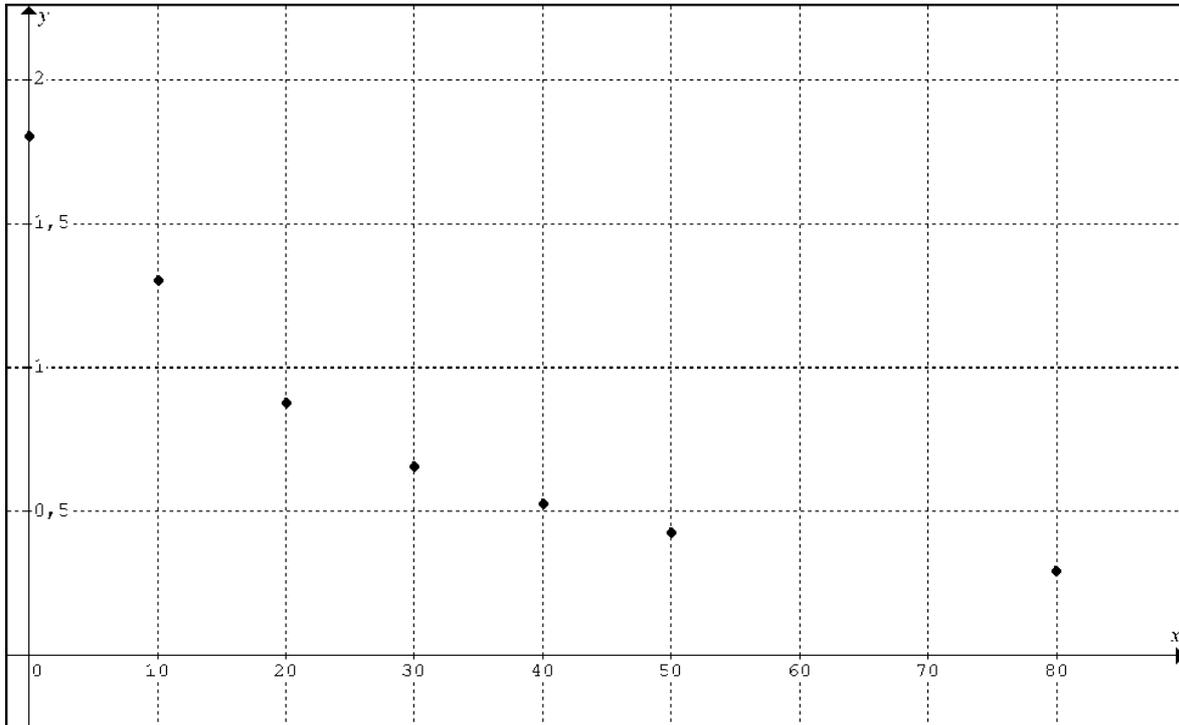
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

### EXERCICE 1 (3 points)

Le tableau ci-dessous donne la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau (en  $\text{cm}^3/\text{ml}$  d'eau) à la pression de 1 bar, pour différentes valeurs de la température (en  $^\circ\text{C}$ ).

Température $t_i$	0	10	20	30	40	50	80
Solubilité $y_i$	1,8	1,3	0,88	0,65	0,52	0,43	0,29

Le nuage de points représentant cette série est donné par le graphique suivant :



1. La forme de ce nuage conduit à envisager un ajustement exponentiel de la série  $(t_i ; y_i)$  .

On pose  $z_i = \ln(y_i)$  .

Recopier **sur votre copie** et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les valeurs de  $z_i$  à  $10^{-3}$  près.

Température $t_i$	0	10	20	30	40	50	80
$z_i = \ln(y_i)$							

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $t$  de la série  $(t_i ; z_i)$  par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à  $10^{-3}$ .
3. Dans la suite, on retient pour droite d'ajustement la droite d'équation  $z = -0,023t + 0,41$  . Dédire de cette équation que la relation entre la solubilité  $y$  du dioxyde de carbone et la température  $t$  peut se modéliser sous la forme  $y = Ae^{-0,023t}$  où  $A = 1,51$  à  $10^{-2}$  près.
4. En supposant que l'ajustement précédent est valable pour toute valeur de  $t$  comprise dans l'intervalle  $[0 ; 80]$ , déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à la température de  $65^\circ\text{C}$ .

## EXERCICE 2 (4 points)

Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. L'évolution du nombre de bactéries, en fonction du temps, est étudiée dans un laboratoire où travaillent deux techniciens.

### PARTIE A :

L'un des deux techniciens émet l'hypothèse que cette population augmente de 23% toutes les heures. On modélise l'évolution du nombre de bactéries par  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

1. Donner la valeur de  $u_0$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$  (arrondir les valeurs à l'entier le plus proche).
2.
  - a. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
  - b. En déduire que  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 1,23.
3.
  - a. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b. Calculer  $u_7$  à l'entier près. Que représente ce nombre ?
4. Au bout de combien d'heures, selon l'hypothèse émise par ce technicien, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

### PARTIE B :

Le deuxième technicien du laboratoire émet une hypothèse un peu différente et considère que le nombre de bactéries augmente de  $p\%$  toutes les heures ( $p \neq 23$ ). Pour déterminer au bout de combien d'heures, selon son hypothèse, le nombre de bactéries dépasse 500 000, il a réalisé l'algorithme suivant. Cependant, une partie de l'algorithme a été effacée, et on ne dispose que des premiers résultats affichés par celui-ci.

Algorithme	Résultats de l'algorithme
<p><b>Variables :</b> N est un nombre entier p et U sont des nombres réels</p> <p><b>Début :</b> Lire p N prend la valeur 0 U prend la valeur 50 000</p> <p><b>Tant que U &lt;.....</b> N prend la valeur..... U prend la valeur ..... Afficher la valeur de N Afficher la valeur de U</p> <p><b>Fin du tant que</b> Afficher N Afficher U</p> <p><b>Fin</b></p>	<p>N=0    U = 50 000</p> <p>N=1    U = 63 500</p> <p>N=2    U = 80 645</p> <p>N=3    U = 102673.15</p> <p>·</p> <p>·</p> <p>·</p> <p>·</p> <p>·</p> <p>·</p>

1. En utilisant les premiers résultats affichés par l'algorithme, déterminer la valeur de  $p$ .
2. **Sur votre copie**, recopier l'algorithme figurant dans la colonne de gauche du tableau, et compléter les parties manquantes (repérées par des pointillés).  
Au bout de combien d'heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

### EXERCICE 3 (5 points)

#### PARTIE A : RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies et dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 0,6y = 45$ .

1. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle (E) telle que  $f(0) = 20$ .

#### PARTIE B : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dans cette partie, on considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(t) = -55e^{-0,6t} + 75$ .

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe représentative (C) ?
2.
  - a. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .
  - b. Étudier le signe de  $f'$  et en déduire le tableau de variation de  $f$ .
  - c. Tracer la courbe (C) sur une feuille de papier millimétré à **remettre avec la copie**.  
Unités graphiques : 1cm en abscisse ; 2 mm en ordonnées.
3. Résoudre par le calcul l'équation  $f(t) = 70$  (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité).
4. Calculer  $I = \int_0^4 f(t)dt$  (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à  $10^{-2}$ ).  
Donner une interprétation graphique du résultat.

#### PARTIE C : UTILISATION DES RÉSULTATS

*Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le principe de la haute pasteurisation consiste à chauffer dans un autoclave, pendant un laps de temps de 15 secondes, les aliments à une température comprise entre  $70^\circ\text{C}$  et  $75^\circ\text{C}$ .

Du lait dont la température initiale est de  $20^\circ\text{C}$  est introduit dans un autoclave dont la température est constante et égale à  $75^\circ\text{C}$ . La température du lait est donnée par la fonction  $f$  définie dans la partie B, où  $t$  est le temps en secondes.

Déterminer combien de temps, au total, le lait doit rester dans l'autoclave afin d'être pasteurisé.

### EXERCICE 4 (5 points)

On étudie le taux de glycémie dans une population donnée, exprimé en g/L.

#### PARTIE A :

On suppose que le taux de glycémie est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale de moyenne  $\mu = 1$  et d'écart-type  $\sigma = 0,03$ . On mesure la glycémie chez une personne choisie au hasard dans la population.

1. Justifier que la probabilité pour que la glycémie de cette personne soit comprise entre 0,94 et 1,06 a pour valeur approchée 0,95.
2. En déduire qu'une valeur approchée de  $P(X \leq 1,06)$  est 0,975. Justifier votre raisonnement.
3. Sachant que  $P(X \geq 0,97)$  a pour valeur approchée 0,84, en déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $P(0,97 \leq X \leq 1,06)$ .

#### PARTIE B :

Un médecin, qui ne connaît pas l'hypothèse émise dans la PARTIE A, souhaite estimer la proportion  $p$  inconnue des personnes de cette population dont le taux de glycémie est supérieur à 1,06.

Il prélève au hasard un échantillon de 1000 personnes dans la population étudiée.

Il constate que 29 personnes ont un taux de glycémie supérieur à 1,06.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de 95% de la proportion  $p$ .
2. Le résultat précédent est-il cohérent avec la réponse à la question A) 2 ? Justifier.

#### PARTIE C :

On admet que, dans la population étudiée, la probabilité qu'une personne ait un taux de glycémie supérieur à 0,99g/L est  $p_1 = 0,64$ .

On tire un échantillon de 100 personnes au hasard. On suppose que la population est suffisamment importante pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise de 100 personnes. On appelle  $Y$  la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes dont la glycémie est supérieure à 0,99g/L.

1. Justifier que  $Y$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies. On appelle  $\mu'$  la moyenne et  $\sigma'$  l'écart type de la loi normale  $Z$  approximant la loi binomiale  $Y$ .

2. Justifier que  $\mu' = 64$  et  $\sigma' = 4,8$ .
3. Déterminer une valeur approchée de  $P(Z \leq 78,4)$  à  $10^{-2}$  près. On remarquera que  $78,4 = \mu' + 3\sigma'$ .

## EXERCICE 5 (3 points)

### QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Reporter sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ , et soit  $(C)$  sa représentation graphique dans un repère du plan. La tangente à la courbe  $(C)$  au point  $A(1; \ln(4))$  a pour coefficient directeur :

- a. 0,25                      b. 0,5                      c. 1                      d.  $\ln 4$

2. On considère deux variables aléatoires  $Y$  et  $Z$ .

$Y$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[1; 3]$ .

$Z$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

- a.  $Y$  et  $Z$  ont la même variance.  
b.  $Y$  et  $Z$  ont la même espérance.  
c. La variance de  $Z$  est strictement inférieure à la variance de  $Y$ .  
d. La variance de  $Z$  est nulle.

3. Une culture bactériologique comporte initialement 8 000 bactéries.

Leur nombre augmente de 20% par heure.

Dans la copie de la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule peut-on rentrer en B3, puis recopier vers le bas, pour calculer le nombre de bactéries en fonction de l'heure ?

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	8 000
3	1	
4	2	

- a. = B2 + 0,20                      b. = 0,8 \* B2                      c. = 1,2 \* B2                      d. = 1,2 \* \$B\$2