

%Calcular factor de amortecimento

clc; clear all;

wn=sqrt(4000); %wn^2=4000;

fa=120/(2\*wn), %2\*fa\*wn=120

num\_1=[0 0 1000]; %1000

den\_1=[1 110 1000]; %s^2+110\*s+1000

H\_1=tf(num\_1,den\_1); %2ªordem

num\_2=[0 0 1000]; %1000

den\_2=[0 110 1000]; %s^2+110\*s+1000

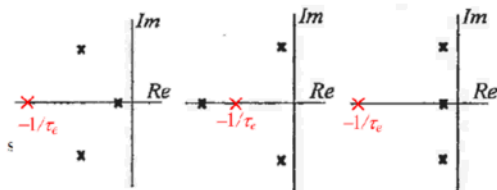
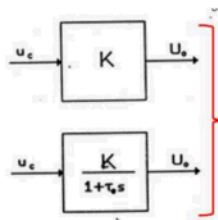
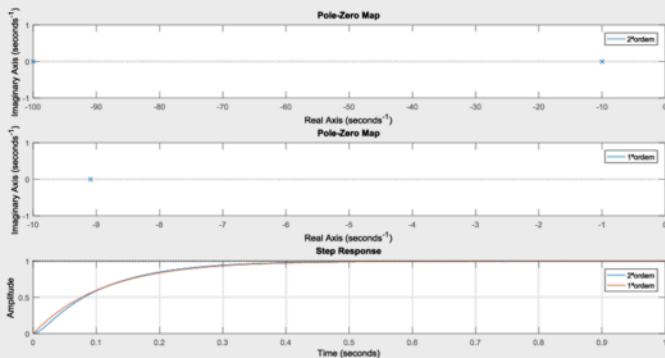
H\_2=tf(num\_2,den\_2); %1ªordem

subplot(3,1,1); pzmap(H\_1); legend('2ªordem');

subplot(3,1,2); pzmap(H\_2); legend('1ªordem');

subplot(3,1,3); step(H\_1,H\_2,1.0); grid on;

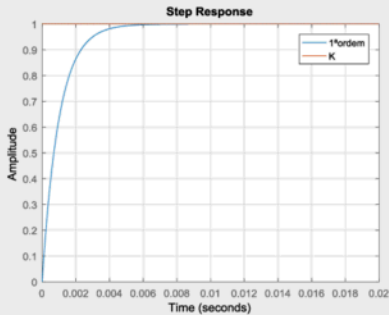
legend('2ªordem','1ªordem');



```
%Modelo para efeitos de controlo
clc; clear all;
K=1; %Ganho do conversor;
tao=1e-3; %Constante de tempo tao=1ms
```

```
num_1=[0 K];
den_1=[tao 1];
H_1=tf(num_1,den_1); %1ª ordem
```

```
num_2=[0 K];
den_2=[0 1];
H_2=tf(num_2,den_2); %desprezar tao
step(H_1,H_2,0.02); grid on; legend('1ª ordem','K');
```



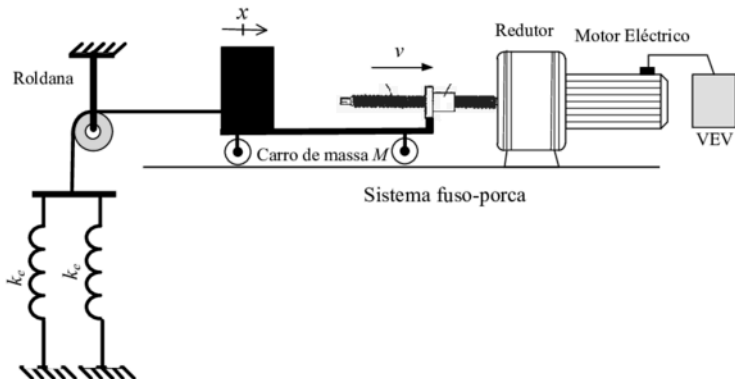
Fazer uma simulação numérica:

- i)  $U=U_o=U_{oav}$ ;
- ii) Com a FT;
- iii) Relacionar com a constante de tempo  $\tau$ ;
- iv) Com o modelo em Simulink (SimPowerSystems).

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30

## Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema fuso-porca. Acoplado na extremidade da porca existe um carro de massa  $M$ . Ligado ao carro existem duas molas iguais com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ . Desprezar a massa da porca, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem o momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema fuso-porca tem uma relação de transmissão  $i_{FP}$  e um rendimento  $\eta_{FP}$ .



a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m = f(x)$ .

[cotação: 2

valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ ,  $K=10$  e  $\tau_e=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10\text{s}^{-1}$  e  $-100\text{s}^{-1}$ .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalão</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m = f(x)$ .

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1. Cada bloco representa um elemento do accionamento e com identificação dos seus parâmetros.

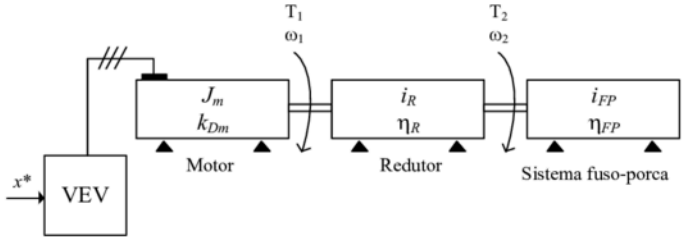


Figura A.1 – Esquema de blocos representativo do problema.

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

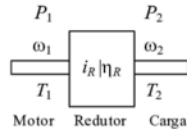


Figura A – Elemento redutor com identificação do seus parâmetros.

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) com a relação de transmissão  $i_R$ .

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

O sistema fuso-porca permite a conversão de um movimento rotativo em linear. Relação entre binário e força do sistema fuso-porca (Figura B) (5).

$$\eta_{FP} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{FP} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{FP} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

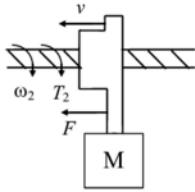


Figura B – Elemento mecânico para conversão do movimento rotativo em linear.

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) com a relação de transmissão  $i_{FP}$ .

$$i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} \Leftrightarrow F = i_{FP} \eta_{FP} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (6)$$

$$i_{FP} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força de inércia  $F$  resultante do carro de massa  $M$  é obtida com (8). Esta força pode ser relacionada com a aceleração linear  $a$ , velocidade linear  $v$  e posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F_i = Ma \Leftrightarrow F_i = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F_i = M \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8)$$

A força  $F_m$  ( $F_{m1}$  e  $F_{m2}$ ) associada às duas molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (9). Resulta do coeficiente de elasticidade  $k_e$  e da posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} \Leftrightarrow F_m = k_e x + k_e x \Leftrightarrow F_m = 2k_e x \quad (9)$$

Com (8) e (9) é obtido o somatório de forças total  $F_T$  (10). Admite-se constante o coeficiente de elasticidade e igual para a tracção ou compressão da mola.

$$F_T = F_i + F_m \Leftrightarrow F_T = M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x \quad (10)$$

**Resolução para controlo de posição  $x$  com  $T_m = f(x)$ .**

Substituir (10) em (6) para obter (11).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (11)$$

Substituir (11) em (3) para obter (12).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (12)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_1$  com a substituição de (7) para obter (13).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow[i_{FP} = \frac{\omega_1}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{FP} v]{} \omega_1 = i_R i_{FP} v \quad (13)$$

Derivando a ordem ao tempo (13) para obter (14).

$$\omega_1 = i_R i_{FP} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear  $v$  com o deslocamento  $x$  é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (12) em (1) com (13), (14) e (15) para obter (16).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_l \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow[v = \frac{dx}{dt}]{\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)} \\ T_m &= J_m i_R i_{FP} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow \\ T_m &= \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \end{aligned} \quad (16)$$

**b)** O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17) com as regras das transformadas de Laplace.



$$\begin{aligned}
 T_m &= \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow{TL} \\
 T_m(s) &= s^2 \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{FP} X(s) + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} X(s) \Leftrightarrow \\
 T_m(s) &= \left[ s^2 \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Dividir (17) por  $\left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)$  para simplificação e obter (18).

$$\begin{aligned}
 \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}} \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{\left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)} \frac{2k_e}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R i_{FP}}{\left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)} + \frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{\left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)}} \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M} + \frac{2k_e}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}} \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M} + \frac{2k_e}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Diagrama de blocos com uma possível solução para um sistema de accionamento com controlo da posição linear  $x$ , representada na Figura D.

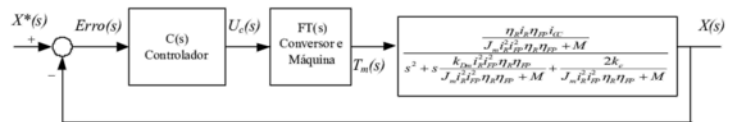


Figura D – Diagrama de blocos do accionamento para controlo da posição  $x$ .

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.

- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto Variador Electrónico de Velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT aproximada de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $\frac{X(s)}{T_m(s)}$  representa a FT obtida na equação (18).

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_c)$ ,  $K=10$  e  $\tau_c=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema, ganho 50 e dois pólos  $-10\text{s}^{-1}$  e  $-100\text{s}^{-1}$ , e a obtida em (18), com o sistema fuso-porca, carro de massa  $M$  e as suas molas é obtida com (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP}}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M} + \frac{2k_c}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}} \Rightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)}$$

Desenvolvendo (19) matematicamente o denominador na forma  $(1+as)$  e  $(1+bs)$  para cancelamento dos pólos com o zero da FT do compensador PI é obtida (20).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10\left(1+\frac{1}{10}s\right)100\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{1000\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)}$$

A Função de Transferência do compensador PI é obtida com (21). Esta FT é caracterizada por um ganho  $k_c$  e uma constante de tempo  $\tau_c$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1 + s\tau_c)}{s} \quad (21)$$

A Função de Transferência da cadeia de acção do sistema tem quatro pólos (Figura E): **i)** o pólo na origem do PI (22), **ii)** o pólo igual a  $-10\text{s}^{-1}$  (23), **iii)** o pólo igual a  $-100\text{s}^{-1}$  (24), **iv)** o pólo associado à constante de tempo de atraso  $\tau_c$  (25).

$$s = 0 \quad (22)$$

$$s = -10\text{s}^{-1} \quad (23)$$

$$s = -100\text{s}^{-1} \quad (24)$$