

c) Acoplado à máquina assíncrona trifásica existe um redutor e uma carga conforme representado na Figura. Desprezar os binários resistentes do motor e redutor. Admita uma relação de transmissão para o redutor de 10 e um binário de atrito viscoso ($k_D=0,0941\text{Nms}$) para a carga. Admita constante o escorregamento para todas as características electromecânicas V/f . Para uma velocidade $N=88\text{rpm}$ (saída do redutor) calcule justificadamente: frequência fundamental das tensões de saída do VEV, o valor de m_a , a velocidade de rotação, o binário desenvolvido e o rendimento. Admita novamente que o valor eficaz da primeira harmónica da tensão composta (ligação em estrela dos enrolamentos do estator) é obtido com $U_{12\text{is}} = \left[\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \right] m_a U_{dc}$.

A Figura A.0 representa a característica electromecânica de acordo com o enunciado do problema. Corresponde à característica nominal com a ligação em estrela (380V/50Hz), com apresentação do ponto de funcionamento nominal para o binário nominal (T_n) e velocidade nominal (ω_n).

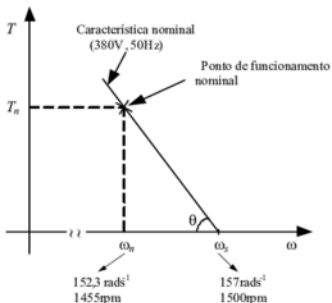


Figura A.0 – Característica electromecânica com a técnica V/f .

A Figura A1 representa o accionamento electromecânico em estudo. É constituído pelo motor (máquina assíncrona trifásica), redutor e carga.

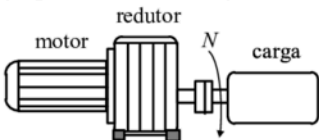


Figura A1 – Accionamento electromecânico em estudo.

Na Figura 1 T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor.

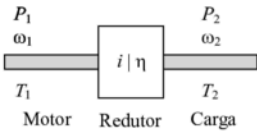


Figura 1: Sistema mecânico redutor.

Com base na Figura 1, a relação entre binários de entrada (T_1) e saída (T_2) do redutor é obtida com (20), admitindo a existência de perdas mecânicas com um rendimento η .

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta \omega_1 T_1 \Leftrightarrow i = \frac{T_2}{\eta T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (20)$$

Da equação (20) e pela definição de relação de transmissão i , são obtidas duas relações, (21) e (22).

$$i = \frac{T_2}{\eta T_1} \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (21)$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (22)$$

De acordo com o enunciado do problema, a velocidade de saída do redutor, ou seja na carga tem um valor de $N=N_2=88\text{rpm}$. Aplicando (22) permite calcular a velocidade na entrada do redutor N_1 , ou seja, no veio do motor com (23).

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i \omega_2 \xrightarrow{\omega_2 = \frac{2\pi}{60} \times 88\text{rpm}} \omega_1 = i \frac{2\pi}{60} N_2 \quad (23)$$

Com (23) calcular a velocidade na entrada do redutor (24) com os dados do problema.

$$\omega_1 = i \frac{2\pi}{60} N_2 \xrightarrow{i=10, N_2=88\text{rpm}} \omega_1 = 10 \times \frac{2\pi}{60} \times 88 \Leftrightarrow \omega_1 = 92,15\text{rads}^{-1} \quad (24)$$

Calcular o binário de atrito viscoso na carga T_2 (25), e na entrada do redutor T_1 com (21), com os dados do problema. É admitido um rendimento unitário (sem perdas mecânicas) para o redutor.

$$T_2 = k_D \omega_2 \Leftrightarrow \xrightarrow{\omega_2 = \frac{2\pi}{60} \times 88\text{rads}^{-1}, k_D = 0,0941\text{Nms}} T_2 = 0,0941 \times 88 \Leftrightarrow T_2 = 8,67\text{Nm} \quad (25)$$

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \xrightarrow{T_2 = 8,67\text{Nm}, \eta=1, i=10} T_1 = \frac{8,67}{1 \times 10} \Leftrightarrow T_1 = 0,86\text{Nm} \quad (26)$$

O escorregamento s com a relação entre velocidades ω_s e ω é obtido com (27).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s \omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s \omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s) \omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega = \omega_s (1-s) \quad (27)$$

Calcular o escorregamento para as condições nominais com (28). De acordo com o enunciado do problema, $f_n=50\text{Hz}$ e $N_n=1460\text{rpm}$. A velocidade angular de sincronismo é calculada com (29), com o número de par de pólos $n_{pp}=2$.

$$s = \frac{\omega_s - \omega_n}{\omega_s} \xrightarrow[\omega_s = 2\pi \times 50 / 2]{\omega_n = 1460 \times 2\pi / 60} s = \frac{\frac{2\pi \times 50}{2} - 1460 \times \frac{2\pi}{60}}{\frac{2\pi \times 50}{2}} \Leftrightarrow s = 0,0267 \quad (28)$$

$$\omega_{s,50\text{Hz}} = \frac{2\pi f_{50\text{Hz}}}{n_{pp}} \Leftrightarrow \omega_{s,50\text{Hz}} = \frac{2\pi \times 50}{2} \Leftrightarrow \omega_{s,50\text{Hz}} = 157,00 \text{rads}^{-1} \xrightarrow[\times \frac{60}{2\pi}]{\times \frac{60}{2\pi}} N_{s,50\text{Hz}} = 1500 \text{rpm} \quad (29)$$

O escorregamento s com a relação entre velocidades ω_s e ω é obtido com (30).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s\omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s\omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s)\omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega_s = \frac{\omega}{(1-s)} \quad (30)$$

Com a velocidade ω_1 na entrada do redutor (24) calcular a velocidade angular de sincronismo ω_{s1} (31).

$$\omega_s = \frac{\omega}{(1-s)} \xrightarrow[\omega_s = \omega_{s1}]{\omega = \omega_1} \omega_{s1} = \frac{\omega_1}{(1-s)} \Leftrightarrow \omega_{s1} = \frac{92,15}{(1-0,0267)} \Leftrightarrow \omega_{s1} = 94,67 \text{rads}^{-1} \quad (31)$$

Cálculo da frequência f_{s1} de sincronismo das tensões impostas pelo ondulator de tensão (32). A frequência $f=30\text{Hz}$ representa a frequência fundamental da primeira harmónica da tensão composta u_{12} (Figura A.2).

$$\omega_{s1} = \frac{2\pi f_{s1}}{n_{pp}} \Leftrightarrow 2\pi f_{s1} = \omega_{s1} n_{pp} \Leftrightarrow f_{s1} = \frac{\omega_{s1} n_{pp}}{2\pi} \Leftrightarrow f_{s1} = \frac{94,67 \times 2}{2 \times \pi} \Leftrightarrow f_{s1} \approx 30,00 \text{Hz} \quad (32)$$

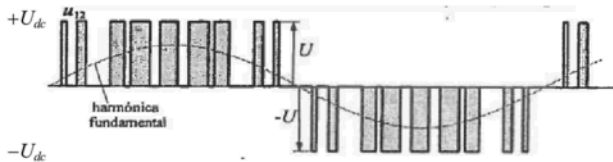


Figura A.2: Exemplo da evolução temporal da tensão composta u_{12} e respectiva primeira harmónica.

Com a frequência de 30Hz são calculadas duas tensões, respectivamente (33) e (34).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \Leftrightarrow U = 50 + 5,1 \times 30 \Leftrightarrow U = 203 \text{V} \quad (33)$$

$$U = U_n / f_n \times f \Leftrightarrow U = 380 / 50 \times 30 \Leftrightarrow U = 228 \text{V} \quad (34)$$

Será escolhido o valor mais elevado (34), ou seja o valor máximo que foi calculado em (33) e (34).

$$U = \max\{203; 228\} \Leftrightarrow U = 228 \text{V} \quad (35)$$

Determinação do índice de modulação com (36).

$$U_{12,1s} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} m_a U_{dc} \Leftrightarrow m_a = \frac{2\sqrt{2} U_{12,1s}}{\sqrt{3} U_{dc}} \xrightarrow[U_{dc}=600\text{V}]{U_{12,1s}=228\text{V}} m_a = \frac{2\sqrt{2} \times 228}{\sqrt{3} \times 600} \Leftrightarrow m_a \approx 0,62 \quad (36)$$

```

clc; clear all;
fs=50; npp=2; Nn=1460;
ws=2*pi*fs/npp; %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
wn=Nn*2*pi/60; %Velocidade nominal [rad/s]
s=(ws-wn)/ws; %Calcular escorregamento

i=10; %Relacao de transmissão do Redutor
kD=0.941; %Atrito Viscoso
%i=w1/w2 %Relação de transmissão
N2=88; %Velocidade na saída do redutor [rpm]
w2=N2*2*pi/60; %Velocidade na saída do redutor [rad/s]
N1=i*N2; %Velocidade na entrada do redutor [rpm]
w1=N1*2*pi/60; %Velocidade na entrada do redutor [rad/s]
%i=w1/w2=T2/T1 %Relação de transmissão
T2=kD*w2; %Binário na saída do redutor
T1=T2/i; %Binário na entrada do redutor
clc;
fprintf('kD=%gNms-1\n',kD);
fprintf('T2=%gNm\n',T2);
fprintf('T1=%gNm\n',T1);

ws1=w1/(1-s); %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
Ns1=N1/(1-s); %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
fs1=Ns1*npp/60; %Frequência de sincronismo [Hz]
clc;
fprintf('ws1=%grads-1\n',ws1);
fprintf('Ns1=%grpm\n',Ns1);
fprintf('fs1=%gHz\n',fs1);

U0=50; f=fs1; Un=380; fn=50;
Ua=U0+5.1*f, Ub=Un/fn*f,
U=max(U0+5.1*f,Un/fn*f),
Udc=600; %Tensão Udc no barramento DC
ma=2*sqrt(2)*U/(sqrt(3)*Udc);

clc;
fprintf('f=fs1=%gHz\n',f);
fprintf('Ua=%gV\n',Ua);
fprintf('Ub=%gV\n',Ub);
fprintf('ma=%g\n',ma);

```

```
clc; clear all;
U0=50; f=30; Un=380; fn=50;
Ua=U0+5.1*f, Ub=Un/fn*f,
U=max(U0+5.1*f, Un/fn*f),

Udc=600; %Tensão Udc no barramento DC
ma=2*sqrt(2)*U/(sqrt(3)*Udc);

clc;
fprintf('f=%gHz\n', f);
fprintf('Ua=%gV\n', Ua);
fprintf('Ub=%gV\n', Ub);
fprintf('ma=%g\n', ma);

f=30Hz
Ua=203V
Ub=228V
ma=0.620537
```

Código em Matlab para validar os valores da **alínea c.**

```
clc; clear all;
fs=50; npp=2; Nn=1460;
ws=2*pi*fs/npp;
wn=Nn*2*pi/60;
s=(ws-wn)/ws,

fs30Hz=30;
ws30Hz=2*pi*fs30Hz/npp;
w30Hz=ws30Hz*(1-s),
N30Hz=w30Hz*60/(2*pi),

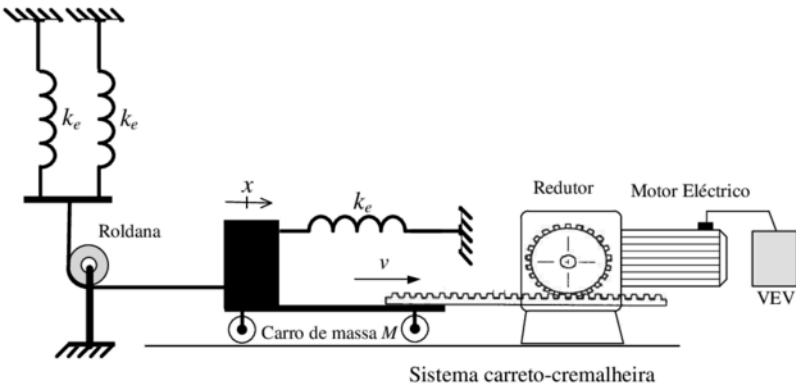
kD=0.0941;
T=kD*w30Hz;

clc;
fprintf('kD=%gNms-1\n', kD);
fprintf('T=%gNm\n', T);

kD=0.0941Nms-1
T=8.63222Nm
```

Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carroto-cremalheira. Acoplado na extremidade da cremalheira existe um carro de massa M . Ligado ao carro de massa M existem duas molas iguais com o coeficiente de elasticidade k_e . Desprezar a massa da cremalheira, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} . O redutor tem uma relação de transmissão i_R e um rendimento η_R . O sistema carroto-cremalheira tem uma relação de transmissão i_{CC} e um rendimento η_{CC} .



a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da posição linear x .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), realizando as simplificações necessárias, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b), $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$, $K=10$ e $\tau_e=1\text{ms}$. Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor -10s^{-1} e -100s^{-1} .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1.

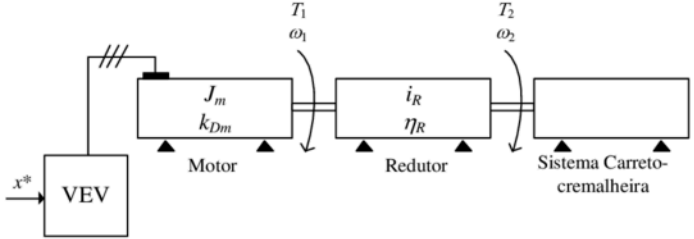


Figura A.1

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1) T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

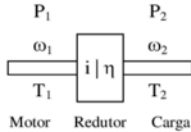


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) para a relação de transmissão.

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

Relação entre binário e força do sistema carroto-cremalheira (Figura B) (5). O sistema carroto-cremalheira permite a conversão de um movimento rotativo em linear.

$$\eta_{CC} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{CC} P_2 \Leftrightarrow v F = \eta_{CC} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

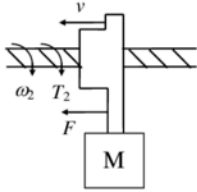


Figura B

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) para a relação de transmissão.

$$i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} \Leftrightarrow F = i_{CC} \eta_{CC} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (6)$$

$$i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força de inércia F resultante da massa M é obtida com (8). Esta força pode ser relacionada com a aceleração a , velocidade linear v e posição/deslocamento linear x .

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F = M \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8)$$

A força F_m (F_{m1} e F_{m2}) associada às duas molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (9). Resulta do coeficiente de elasticidade k_e e da posição/deslocamento linear x .

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} \Leftrightarrow F_m = k_e x + k_e x \Leftrightarrow F_m = 2k_e x \quad (9)$$

Com (8) e (9) é obtido o somatório de forças total F_T (10).

$$F_T = F + F_m \Leftrightarrow F_T = M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x \quad (10)$$

Resolução para controlo de posição x :

Substituir (10) em (6) para obter (11).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (11)$$

Substituir (11) em (3) para obter (12).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (12)$$

Resolver (4) em ordem a ω_1 com a substituição de (7) para obter (13).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{CC} v} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (13)$$

Derivando a ordem ao tempo (13) para obter (14).

$$\omega_l = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_l}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear v com o deslocamento x é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (12) em (1) com (13), (14) e (15) para obter (16).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_l}{dt} + k_{Dm} \omega_l + T_l \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{\substack{v = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}} \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \end{aligned} \quad (16)$$

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear x** .

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17).

$$\begin{aligned} T_m &= \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{TL} \\ T_m(s) &= s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{CC} X(s) + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} X(s) \Leftrightarrow \\ T_m(s) &= \left[s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} \end{aligned} \quad (17)$$