

- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto Variador Electrónico de Velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT aproximada de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $\frac{X(s)}{T_m(s)}$  representa a FT obtida na equação (18).

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_c)$ ,  $K=10$  e  $\tau_c=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema, ganho 50 e dois pólos  $-10\text{s}^{-1}$  e  $-100\text{s}^{-1}$ , e a obtida em (18), com o sistema fuso-porca, carro de massa  $M$  e as suas molas é obtida com (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP}}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M} + \frac{3k_c}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}} \Rightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)}$$

Desenvolvendo (19) matematicamente o denominador na forma  $(1+as)$  e  $(1+bs)$  para cancelamento dos pólos com o zero da FT do compensador PI é obtida (20).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10\left(1+\frac{1}{10}s\right)100\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{1000\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)}$$

A Função de Transferência do compensador PI é obtida com (21). Esta FT é caracterizada por um ganho  $k_c$  e uma constante de tempo  $\tau_c$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1 + s\tau_c)}{s} \quad (21)$$

A Função de Transferência da cadeia de acção do sistema tem quatro pólos (Figura E): **i)** o pólo na origem do PI (22), **ii)** o pólo igual a  $-10\text{s}^{-1}$  (23), **iii)** o pólo igual a  $-100\text{s}^{-1}$  (24), **iv)** o pólo associado à constante de tempo de atraso  $\tau_c$  (25).

$$s = 0 \quad (22)$$

$$s = -10\text{s}^{-1} \quad (23)$$

$$s = -100\text{s}^{-1} \quad (24)$$

$$1 + s\tau_c = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\tau_c} \xrightarrow{\tau_c=1\text{ms}} s = -1000\text{s}^{-1} \quad (25)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a **FT do sistema global seja de segunda ordem**, uma solução com duas condições é: **i)** desprezar a dinâmica da constante de tempo  $\tau_c$  do atraso estatístico do conversor, **ii)** com o zero do PI cancelar o pólo dominante (**o mais próximo da origem**)  $s=-10\text{s}^{-1}$ .

Para **não ser considerada a dinâmica da constante de tempo  $\tau_c$  do atraso do conversor**, tem de ser cumprida a seguinte regra:

**5.2.3 Simplificação de funções de transferência:** “Quando existem pólos no sistema muito afastados dos pólos dominantes (afastamento da ordem de 10 vezes a localização dos pólos dominantes), para a resposta do sistema, podem ser desprezados aqueles pólos localizados no interior do SCE (devendo ser mantido o ganho estático do referido sistema)”.

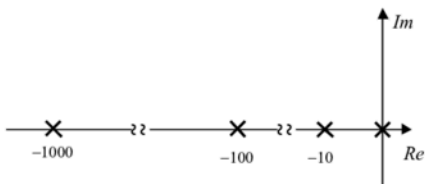


Figura E – Mapa de pólos e zeros do accionamento em estudo.

Utilizar o zero do compensador PI (21) para anular o pólo dominante em (20) e obter  $\tau_c$  (26).

$$\tau_c = \frac{1}{10} \text{s}^{-1} \quad (26)$$

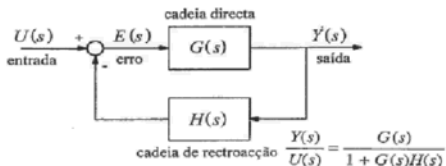


Fig. 5.2 – Diagrama de blocos de um sistema de controlo genérico univariável em cadeia fechada.

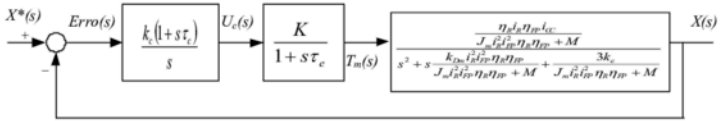


Figura F – Diagrama de blocos do accionamento em estudo. Função de transferência global  $X(s)/X^*(s)$  de quarta ordem.

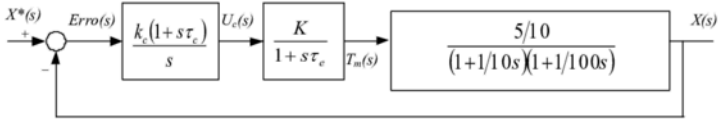


Figura G – Diagrama de blocos do accionamento em estudo. Função de transferência global  $X(s)/X^*(s)$  de quarta ordem.

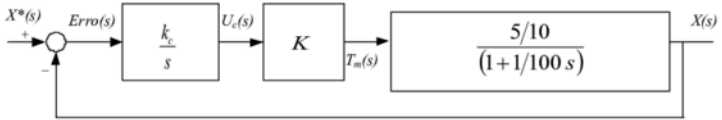


Figura H – Diagrama de blocos do accionamento em estudo. Função de transferência global  $X(s)/X^*(s)$  de segunda ordem.

Com a Figura H, a função de transferência da cadeia de acção  $G(s)$  do sistema é obtida com (27).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times K \times \frac{5}{100} = \frac{5k_c K}{s \left( \frac{100+s}{100} \right)} = \frac{5k_c K}{s(100+s)} \quad (27)$$

Com a Figura H, a função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (28).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c K}{s(100+s)}}{1 + \frac{5k_c K}{s(100+s)}} = \frac{5k_c K}{s(100+s) + 5k_c K} \times \frac{s(100+s)}{s(100+s) + 5k_c K} = \frac{5k_c K}{s^2 + 100s + 5k_c K} \quad (28)$$

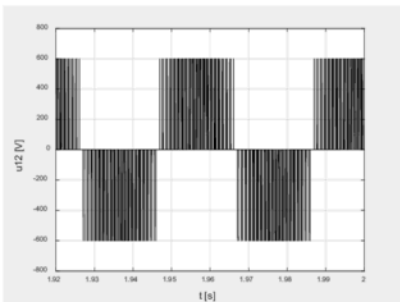
Aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214] (29) com um factor de amortecimento de  $\xi = \sqrt{2}/2$  para dimensionar  $k_c$  (30).

$$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\xi=\sqrt{2}/2} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\sqrt{2}/2 \omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\sqrt{2}=1,41} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2} \quad (29)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_o = 100 \\ \omega_o^2 = 5k_c K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_o = \frac{100}{2\xi} \\ \left(\frac{100}{2\xi}\right)^2 = 5k_c K \Leftrightarrow k_c = \frac{\left(\frac{100}{2\xi}\right)^2}{5K} \end{cases} \xrightarrow[\frac{\xi=\sqrt{2}/2}{K=10}]{} k_c = \frac{\left(\frac{100}{2 \times \sqrt{2}/2}\right)^2}{5 \times 10} = 100 \quad (30)$$

## Problema 2

Um Variador Electrónico de Velocidade (VEV), com comando V/f, alimenta uma máquina assíncrona trifásica com as seguintes características nominais: 220/380V; 50Hz; 2,2kW; 1460rpm. A característica tensão-frequência de comando é obtida com  $U = \max(U_0 + 5,1 \times f; U_n / f_n \times f)$  e tensão  $U_0=50V$ .



a) Justificadamente, apresente o esquema de blocos com uma possível solução para implementar a técnica de comando V/f com opção de inversão do sentido de rotação. Identifique a tensão  $U_0$  e descreva a sua função/objectivo. Para a ligação em estrela dos enrolamentos do estator, justificadamente apresente o gráfico com a característica tensão-frequência para o intervalo  $0 \leq f \leq f_n$ . [cotação: 2 valores]

b) A figura representa a evolução temporal da tensão composta  $u_{12}$  de saída do VEV e aplicada no estator da máquina assíncrona trifásica. O valor eficaz da primeira harmónica da tensão composta  $u_{12}$  de saída do VEV, com o índice de modelação de amplitude  $m_a$ , e tensão  $U_{dc}$  no barramento DC, é dado por:  $U_{12,1s} = \left[ \sqrt{3} / (2\sqrt{2}) \right] m_a U_{dc}$ . Calcule o valor da tensão aplicada pelo Variador Electrónico de Velocidade à máquina (ligação em estrela) e o índice de modelação de amplitude  $m_a$ .

[cotação: 2 valores]

c) Acoplado à máquina assíncrona trifásica existe um redutor e uma carga conforme representado na

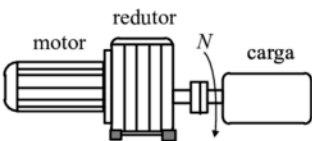
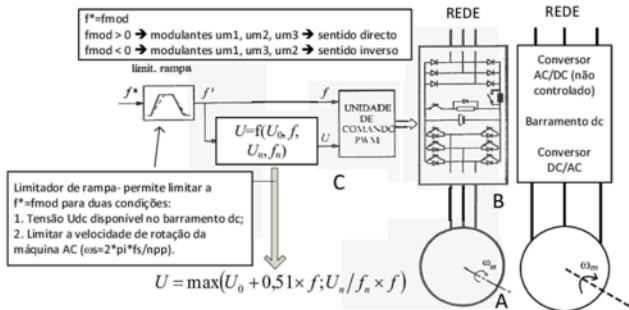


Figura. Desprezar os binários resistentes do motor e redutor. Admita uma relação de transmissão para o redutor de 10 e um binário de atrito viscoso ( $k_D=0,941 \text{ Nms}$ ) para a carga. Admita constante o escorregamento para todas as características electromecânicas V/f. Para uma velocidade  $N=88 \text{ rpm}$  (saída do redutor) calcule justificadamente: frequência fundamental das tensões de saída do VEV, o

valor de  $m_a$ , a velocidade de rotação, o binário desenvolvido e o rendimento. Admita novamente que o valor eficaz da primeira harmónica da tensão composta (ligação em estrela dos enrolamentos do estator) é obtido com  $U_{12,1s} = \left[ \sqrt{3} / (2\sqrt{2}) \right] m_a U_{dc}$ .

[cotação: 2 valores]

a) Justificadamente, apresente o esquema de blocos com uma possível solução para implementar a técnica de comando V/f com opção de inversão do sentido de rotação. Identifique a tensão  $U_0$  e descreva a sua função/objectivo. Para a ligação em estrela dos enrolamentos do estator, justificadamente apresente o gráfico com a característica tensão-frequência para o intervalo  $0 \leq f \leq f_n$ .

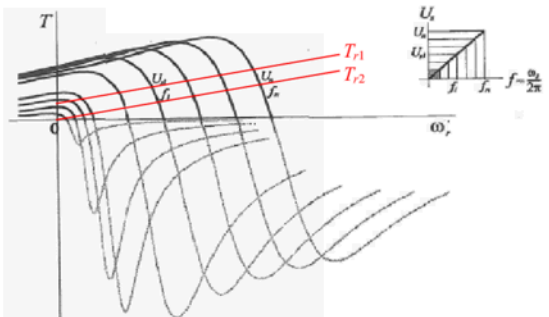


Uma possível solução deverá conter os seguintes blocos ou subsistemas:

- **Subsistema A:** Máquina assíncrona trifásica;
- **Subsistema B:** Circuito de potência constituído por: i) rectificador monofásico ou trifásico (dependente da potência) habitualmente em ponte não controlado, ii) resistência de pré-carga do condensador, iii) barramento de corrente contínua, iv) *chopper* e resistência de energia de retorno, v) ondulator de tensão trifásico em ponte com circuito de guiamento/drivers;
- **Subsistema C:** Circuito de comando que permita o cálculo da amplitude da modulante  $A_{mod}$  em função da frequência da modulante  $f_{mod}$ . Neste cálculo é necessário o valor da tensão  $U_{dc}$  no barramento de corrente contínua. A amplitude  $A_{mod}$  permite definir a amplitude de três sinusóides que serão comparados em cada instante com um sinal auxiliar chamado onda portadora. Esta onda portadora, será habitualmente uma onda triangular, definida por uma amplitude  $A_{port}$  e uma frequência  $f_{port}$ . A frequência da portadora é um aspecto importante porque impõe a frequência de comutação dos dispositivos semicondutores do circuito de potência. Este circuito de potência funciona como um ondulator de tensão, ou seja, um conversor com modo de funcionamento DC-AC. A amplitude da onda portadora deverá ser sempre superior à amplitude da modulante para evitar sobremodulações.

**Identificar a tensão  $U_0$  e descrever a sua função/objectivo:**

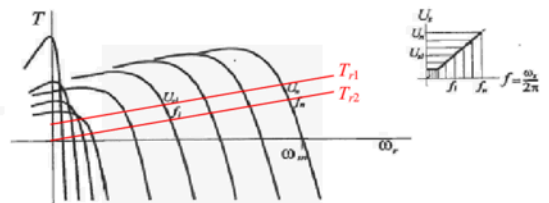
A tensão  $U_0$  habitualmente é identificada como tensão de pedestal (*boost*). Permite estabelecer um valor mínimo da tensão aplicada no estator de máquina para uma frequência mínima ( $f_{min}$ ). Este valor de frequência mínima deverá ser superior a zero (Figuras A, B e C). Torna-se importante estabelecer este valor mínimo de  $U_0$  que irá corresponder um valor mínimo de binário,  $T = f(U^2)$ . Este valor mínimo de binário é importante e necessário quando existem características de binários de carga ou resistentes  $T_r$  elevados (Figuras A, B e C). No exemplo representado nas Figuras A, B e C o binário  $T_{r1}$  e  $T_{r2}$  determina o valor mínimo da tensão a aplicar à máquina assíncrona trifásica (tensão  $U_0$ ). Para o binário  $T_{r1}$  o valor mínimo da tensão  $U_0$  será diferente de zero.



$$\begin{cases} T_{r1} = K_{D1}\omega_r \\ T_{r2} = K_{D2}\omega_r \\ K_{D1} > K_{D2} \end{cases}$$

Fig. 7.11 – Características electromecânicas com a "técnica V/f" ( $U_s/f = \text{constante}$ ).

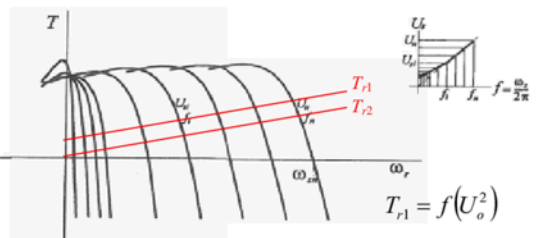
Figura A



$$\begin{cases} T_{r1} = K_C + K_{D1}\omega_r \\ T_{r2} = K_{D2}\omega_r \\ K_{D1} > K_{D2} \end{cases}$$

Fig. 7.12 – Características electromecânicas com a técnica V/f modificada. De cada curva está representada apenas uma porção com efectivo interesse para o funcionamento em regime estacionário.

Figura B



$$\begin{cases} T_{r1} = K_C + K_{D1}\omega_r \\ T_{r2} = K_{D2}\omega_r \\ K_{D1} > K_{D2} \end{cases}$$

$$T_{r1}(\omega_r = 0) = f(U_o^2) = K_C$$

Fig. 7.13 – Características electromecânicas com outra variante da técnica V/f.

Figura C

Característica tensão-frequência para o intervalo  $0 \leq f \leq f_n$ :

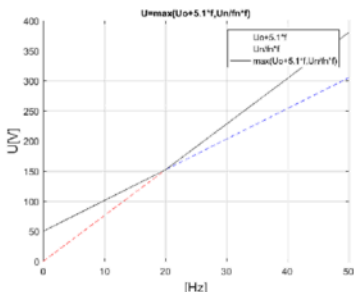
Desenhar a característica tensão-frequência para a equação (1) e (2), enunciado do problema, com uma variação da frequência (3). As características tensão-frequência são equações de recta com uma determinada ordenada na origem e inclinação. A característica tensão-frequência pretendida e de acordo com o enunciado do problema será obtida com a equação (4).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \quad (1)$$

$$U = U_n / f_n \times f \quad (2)$$

$$0 \leq f \leq f_n \quad (3)$$

$$U = \max(U_0 + 5,1 \times f; U_n / f_n \times f) \quad (4)$$



```
clc; clear all;
Uo=50; Un=380; fn=50;
f=0:0.001:50;
Ua=Uo+5.1*f; %Ua=Uo+5.1*f
Ub=Un/fn*f; %Ub=Un/fn*f
U=max(Uo+5.1*f, Un/fn*f); %U=max(Uo+5.1*f, Un/fn*f)
plot(f, Ua, '--b', f, Ub, '--r', f, U, '-k'); grid on;
xlabel('\fontsize{14} [Hz]'); ylabel('\fontsize{14} U[V]');
title('\fontsize{10} U=max(Uo+5.1*f, Un/fn*f)');
legend('Uo+5.1*f', 'Un/fn*f', 'max(Uo+5.1*f, Un/fn*f)');
axis([0 50 0 400]);
%print -dbitmap
```

Com (1) é possível calcular o valor da tensão  $U$  para os dois valores limite da frequência  $f$ , respectivamente com (5), (6).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \xrightarrow[f=0\text{Hz}]{U_0=50\text{V}} U = U_0 \Leftrightarrow U = 50\text{V} \quad (5)$$

$$U = U_0 + 5,1 \times f \xrightarrow[f=50\text{Hz}]{U_0=50\text{V}} U = 50 + 5,1 \times 50 \Leftrightarrow U = 305\text{V} \quad (6)$$

Com (2) é possível calcular o valor da tensão  $U$  para os dois valores limite da frequência  $f$ , respectivamente com (7), (8). De acordo com o enunciado do problema, as tensões nominais são



220/380V. Isto significa que a máquina ligada com o estator em estrela, podem ser aplicadas tensões compostas de 380V.

$$U = U_n / f_n \times f \xrightarrow[\substack{U_n=380V \\ f_n=50Hz \\ f=0Hz}}{U=380/50 \times 0} U = 0V \quad (7)$$

$$U = U_n / f_n \times f \xrightarrow[\substack{U_n=380V \\ f_n=50Hz \\ f=50Hz}}{U=380/50 \times 50} U = 380V \quad (8)$$

O ponto de intersecção das duas características (1) e (2) pode ser calculado com (9). Resulta de igualar ambas as equações.

$$U_0 + 5,1f = \frac{U_n}{f_n} f \Leftrightarrow U_0 + 5,1f = \frac{U_n}{f_n} f \Leftrightarrow U_0 = \frac{U_n}{f_n} f - 5,1f \Leftrightarrow U_0 = \left( \frac{U_n}{f_n} - 5,1 \right) f \Leftrightarrow$$

$$f = \frac{U_0}{\frac{U_n}{f_n} - 5,1} \xrightarrow[\substack{U_0=50V \\ U_n=380V \\ f_n=50Hz}}{f=20Hz} f = 20Hz \quad (9)$$

Com a frequência obtida em (9) calcular o valor da tensão de forma equivalente (10), (11) com utilização de (1), (2).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \xrightarrow[\substack{U_0=50V \\ f=20Hz}}{U=50+5,1 \times 20} U = 152V \quad (10)$$

$$U = U_n / f_n \times f \xrightarrow[\substack{f=20Hz \\ U_n=380V \\ f_n=50Hz}}{U=380/50 \times 20} U = 152V \quad (11)$$

**b)** A figura representa a evolução temporal da tensão composta  $u_{12}$  de saída do VEV e aplicada no estator da máquina assíncrona trifásica. O valor eficaz da primeira harmónica da tensão composta  $u_{12}$  de saída do VEV, com o índice de modelação de amplitude  $m_a$ , e tensão  $U_{dc}$  no barramento DC, é dado por:  $U_{12,1} = \left[ \sqrt{3} / (2\sqrt{2}) \right] m_a U_{dc}$ . Calcule o valor da tensão aplicada pelo Variador Electrónico de Velocidade à máquina (ligação em estrela) e o índice de modelação de amplitude  $m_a$ .

De acordo com a figura do enunciado do problema, pela análise temporal da tensão composta  $u_{12}$  aplicada ao estator da máquina, é **calculada a frequência** com (12). Foi escolhido um intervalo  $\Delta t$  correspondente a um período. Como exemplo foram considerados  $t_f=1,98s$  e  $t_i=1,94s$ .

$$\Delta t = t_f - t_i \Leftrightarrow \Delta t = 1,98 - 1,94 = 0,04s \rightarrow f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow f = 25Hz \quad (12)$$

De acordo com o enunciado do problema, a característica tensão-frequência é obtida por (13).

$$U = \max(U_0 + 5,1 \times f; U_n / f_n \times f) \quad (13)$$

A característica tensão-frequência em (13) permite obter duas parcelas, respectivamente (14) e (15).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \quad (14)$$

$$U = U_n / f_n \times f \quad (15)$$

Com a frequência de 25Hz calculada em (12) são calculadas duas tensões, (16) e (17).

$$U = U_0 + 0,5 \times f \Leftrightarrow U = 50 + 5,1 \times 25 \Leftrightarrow U = 177,5V \quad (16)$$

$$U = U_n / f_n \times f \Leftrightarrow U = 380 / 50 \times 25 \Leftrightarrow U = 190V \quad (17)$$

De acordo com (13) será escolhido o valor mais elevado (18), ou seja o máximo dos dois valores de (16) e (17).

$$U = \max\{177,5; 190\} \Leftrightarrow U = 190V \quad (18)$$

Cálculo do **índice de modulação**  $m_a$  com (19) e utilização de (18). A tensão  $U_{dc}$  pode ser obtida por análise da figura com a evolução temporal  $u_{12}$ . A tensão composta de saída do ondulator de tensão trifásico em ponte, tem como valores máximo e mínimo, respectivamente  $+U_{dc}$  e  $-U_{dc}$  (Figura D).

$$U_{12_{18}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} m_a U_{dc} \Leftrightarrow m_a = \frac{2\sqrt{2} U_{12_{18}}}{\sqrt{3} U_{dc}} \xrightarrow[U_{dc}=600V]{U_{12_{18}}=U=190V} m_a = \frac{2\sqrt{2} \times 190}{\sqrt{3} \times 600} \Leftrightarrow m_a \approx 0,51 \quad (19)$$

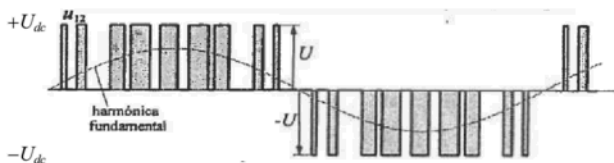


Figura D: Exemplo da evolução temporal da tensão composta  $u_{12}$  com indicação da tensão  $\pm U_{dc}$ .

Código em Matlab para validar (12), (14), (15), (18) e (19).

```
clc; clear all;
tfinal=1.98; tinicial=1.94;
delta_t=tfinal - tinicial;
f=1/delta_t;
U0=50; f=25; Un=380; fn=50;
Ua=U0+5.1*f; Ub=Un/fn*f;
U=max(U0+5.1*f, Un/fn*f);

Udc=600; %Tensão Udc no barramento DC
ma=2*sqrt(2)*U/(sqrt(3)*Udc);

clc;
fprintf('f=%gHz\n', f);
fprintf('Ua=%gV\n', Ua);
fprintf('Ub=%gV\n', Ub);
fprintf('U=%gV\n', U);
fprintf('ma=%g\n', ma);

f=25Hz
Ua=177.5V
Ub=190V
U=190V
ma=0.517115
```