

c) Acoplado à máquina assíncrona trifásica existe um redutor e uma carga conforme representado na Figura. Desprezar os binários resistentes do motor e redutor. Admita uma relação de transmissão para o redutor de 10 e um binário de atrito viscoso ($k_D=0,0941\text{Nms}$) para a carga. Admita constante o escorregamento para todas as características electromecânicas V/f . Para uma velocidade $N=88\text{rpm}$ (saída do redutor) calcule justificadamente: frequência fundamental das tensões de saída do VEV, o valor de m_a , a velocidade de rotação, o binário desenvolvido e o rendimento. Admita novamente que o valor eficaz da primeira harmónica da tensão composta (ligação em estrela dos enrolamentos do estator) é obtido com $U_{12\text{is}} = \left[\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \right] m_a U_{dc}$.

A Figura A.0 representa a característica electromecânica de acordo com o enunciado do problema. Corresponde à característica nominal com a ligação em estrela (380V/50Hz), com apresentação do ponto de funcionamento nominal para o binário nominal (T_n) e velocidade nominal (ω_n).

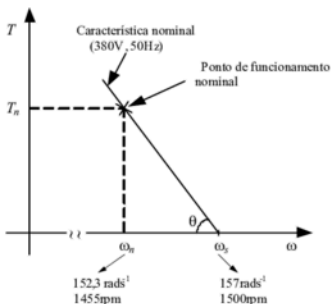


Figura A.0 – Característica electromecânica com a técnica V/f .

A Figura A1 representa o accionamento electromecânico em estudo. É constituído pelo motor (máquina assíncrona trifásica), redutor e carga.

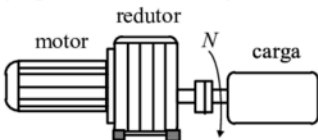


Figura A1 – Accionamento electromecânico em estudo.

Na Figura 1 T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor.

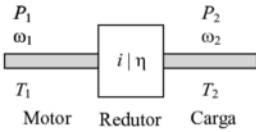


Figura 1: Sistema mecânico redutor.

Com base na Figura 1, a relação entre binários de entrada (T_1) e saída (T_2) do redutor é obtida com (20), admitindo a existência de perdas mecânicas com um rendimento η .

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta \omega_1 T_1 \Leftrightarrow i = \frac{T_2}{\eta T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (20)$$

Da equação (20) e pela definição de relação de transmissão i , são obtidas duas relações, (21) e (22).

$$i = \frac{T_2}{\eta T_1} \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (21)$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (22)$$

De acordo com o enunciado do problema, a velocidade de saída do redutor, ou seja na carga tem um valor de $N=N_2=88\text{rpm}$. Aplicando (22) permite calcular a velocidade na entrada do redutor N_1 , ou seja, no veio do motor com (23).

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i \omega_2 \xrightarrow{\omega_2 = \frac{2\pi}{60} \times 88\text{rpm}} \omega_1 = i \frac{2\pi}{60} N_2 \quad (23)$$

Com (23) calcular a velocidade na entrada do redutor (24) com os dados do problema.

$$\omega_1 = i \frac{2\pi}{60} N_2 \xrightarrow{i=10, N_2=88\text{rpm}} \omega_1 = 10 \times \frac{2\pi}{60} \times 88 \Leftrightarrow \omega_1 = 92,15\text{rads}^{-1} \quad (24)$$

Calcular o binário de atrito viscoso na carga T_2 (25), e na entrada do redutor T_1 com (21), com os dados do problema. É admitido um rendimento unitário (sem perdas mecânicas) para o redutor.

$$T_2 = k_D \omega_2 \Leftrightarrow \xrightarrow{\omega_2 = \frac{2\pi}{60} \times 88\text{rads}^{-1}, k_D = 0,0941\text{Nms}} T_2 = 0,0941 \times 88 \Leftrightarrow T_2 = 8,67\text{Nm} \quad (25)$$

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \xrightarrow{T_2 = 8,67\text{Nm}, \eta = 1, i = 10} T_1 = \frac{8,67}{1 \times 10} \Leftrightarrow T_1 = 0,86\text{Nm} \quad (26)$$

O escorregamento s com a relação entre velocidades ω_s e ω é obtido com (27).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s \omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s \omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s) \omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega = \omega_s (1-s) \quad (27)$$

Calcular o escorregamento para as condições nominais com (28). De acordo com o enunciado do problema, $f_n=50\text{Hz}$ e $N_n=1460\text{rpm}$. A velocidade angular de sincronismo é calculada com (29), com o número de par de pólos $n_{pp}=2$.

$$s = \frac{\omega_s - \omega_n}{\omega_s} \xrightarrow[\omega_s = 1460 \times 2\pi/60]{\omega_n = 2\pi \times 50/2} s = \frac{\frac{2\pi \times 50}{2} - 1460 \times \frac{2\pi}{60}}{\frac{2\pi \times 50}{2}} \Leftrightarrow s = 0,0267 \quad (28)$$

$$\omega_{s,50\text{Hz}} = \frac{2\pi f_{50\text{Hz}}}{n_{pp}} \Leftrightarrow \omega_{s,50\text{Hz}} = \frac{2\pi \times 50}{2} \Leftrightarrow \omega_{s,50\text{Hz}} = 157,00 \text{rads}^{-1} \xrightarrow[\times \frac{60}{2\pi}]{\times \frac{60}{2\pi}} N_{s,50\text{Hz}} = 1500 \text{rpm} \quad (29)$$

O escorregamento s com a relação entre velocidades ω_s e ω é obtido com (30).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s\omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s\omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s)\omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega_s = \frac{\omega}{(1-s)} \quad (30)$$

Com a velocidade ω_1 na entrada do redutor (24) calcular a velocidade angular de sincronismo ω_{s1} (31).

$$\omega_s = \frac{\omega}{(1-s)} \xrightarrow[\omega_s = \omega_{s1}]{\omega_s = \omega_{s1}} \omega_{s1} = \frac{92,15}{(1-0,0267)} \Leftrightarrow \omega_{s1} = 94,67 \text{rads}^{-1} \quad (31)$$

Cálculo da frequência f_{s1} de sincronismo das tensões impostas pelo ondulator de tensão (32). A **frequência $f=30\text{Hz}$ representa a frequência fundamental da primeira harmónica da tensão composta u_{12}** (Figura A.2).

$$\omega_{s1} = \frac{2\pi f_{s1}}{n_{pp}} \Leftrightarrow 2\pi f_{s1} = \omega_{s1} n_{pp} \Leftrightarrow f_{s1} = \frac{\omega_{s1} n_{pp}}{2\pi} \Leftrightarrow f_{s1} = \frac{94,67 \times 2}{2 \times \pi} \Leftrightarrow f_{s1} \approx 30,00 \text{Hz} \quad (32)$$

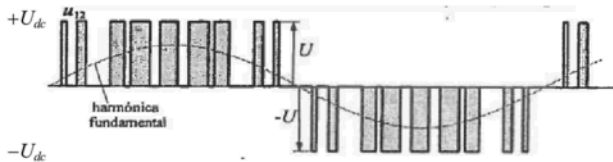


Figura A.2: Exemplo da evolução temporal da tensão composta u_{12} e respectiva primeira harmónica.

Com a frequência de 30Hz são calculadas duas tensões, respectivamente (33) e (34).

$$U = U_0 + 5,1 \times f \Leftrightarrow U = 50 + 5,1 \times 30 \Leftrightarrow U = 203 \text{V} \quad (33)$$

$$U = U_n / f_n \times f \Leftrightarrow U = 380 / 50 \times 30 \Leftrightarrow U = 228 \text{V} \quad (34)$$

Será escolhido o valor mais elevado (34), ou seja o valor máximo que foi calculado em (33) e (34).

$$U = \max\{203; 228\} \Leftrightarrow U = 228 \text{V} \quad (35)$$

Determinação do índice de modulação com (36).

$$U_{12,1s} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} m_a U_{dc} \Leftrightarrow m_a = \frac{2\sqrt{2} U_{12,1s}}{\sqrt{3} U_{dc}} \xrightarrow[U_{dc}=600\text{V}]{U_{12,1s}=228\text{V}} m_a = \frac{2\sqrt{2} \times 228}{\sqrt{3} \times 600} \Leftrightarrow m_a \approx 0,62 \quad (36)$$

```

clc; clear all;
fs=50; npp=2; Nn=1460;
ws=2*pi*fs/npp; %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
wn=Nn*2*pi/60; %Velocidade nominal [rad/s]
s=(ws-wn)/ws; %Calcular escorregamento

i=10; %Relacao de transmissao do Redutor
kD=0.941; %Atrito Viscoso
%i=w1/w2 %Relação de transmissão
N2=88; %Velocidade na saída do redutor [rpm]
w2=N2*2*pi/60; %Velocidade na saída do redutor [rad/s]
N1=i*N2; %Velocidade na entrada do redutor [rpm]
w1=N1*2*pi/60; %Velocidade na entrada do redutor [rad/s]
%i=w1/w2=T2/T1 %Relação de transmissão
T2=kD*w2; %Binário na saída do redutor
T1=T2/i; %Binário na entrada do redutor
clc;
fprintf('kD=%gNms-1\n', kD);
fprintf('T2=%gNm\n', T2);
fprintf('T1=%gNm\n', T1);

ws1=w1/(1-s); %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
Ns1=N1/(1-s); %Velocidade angular sincronismo [rad/s]
fs1=Ns1*npp/60; %Frequência de sincronismo [Hz]
clc;
fprintf('ws1=%ggrads-1\n', ws1);
fprintf('Ns1=%grpm\n', Ns1);
fprintf('fs1=%gHz\n', fs1);

U0=50; f=fs1; Un=380; fn=50;
Ua=U0+5.1*f, Ub=Un/fn*f,
U=max(U0+5.1*f, Un/fn*f),
Udc=600; %Tensão Udc no barramento DC
ma=2*sqrt(2)*U/(sqrt(3)*Udc);

clc;
fprintf('f=fs1=%gHz\n', f);
fprintf('Ua=%gV\n', Ua);
fprintf('Ub=%gV\n', Ub);
fprintf('ma=%g\n', ma);

```

```
clc; clear all;
U0=50; f=30; Un=380; fn=50;
Ua=U0+5.1*f, Ub=Un/fn*f,
U=max(U0+5.1*f, Un/fn*f),

Udc=600; %Tensão Udc no barramento DC
ma=2*sqrt(2)*U/(sqrt(3)*Udc);

clc;
fprintf('f=%gHz\n', f);
fprintf('Ua=%gV\n', Ua);
fprintf('Ub=%gV\n', Ub);
fprintf('ma=%g\n', ma);

f=30Hz
Ua=203V
Ub=228V
ma=0.620537
```

Código em Matlab para validar os valores da **alínea c.**

```
clc; clear all;
fs=50; npp=2; Nn=1460;
ws=2*pi*fs/npp;
wn=Nn*2*pi/60;
s=(ws-wn)/ws,

fs30Hz=30;
ws30Hz=2*pi*fs30Hz/npp;
w30Hz=ws30Hz*(1-s),
N30Hz=w30Hz*60/(2*pi),

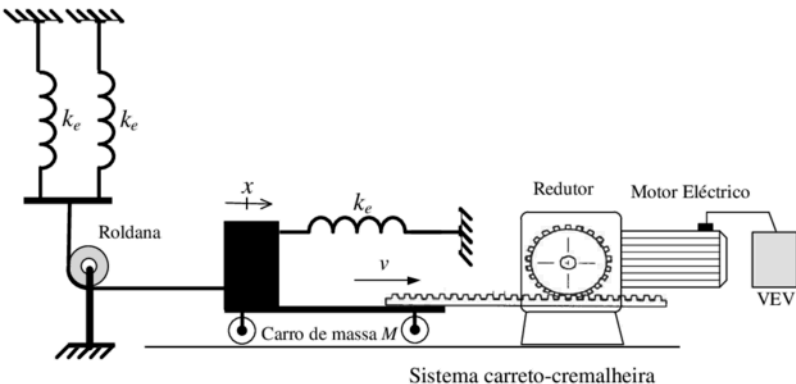
kD=0.0941;
T=kD*w30Hz;

clc;
fprintf('kD=%gNms-1\n', kD);
fprintf('T=%gNm\n', T);

kD=0.0941Nms-1
T=8.63222Nm
```

Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carroto-cremalheira. Acoplado na extremidade da cremalheira existe um carro de massa M . Ligado ao carro de massa M existem duas molas iguais com o coeficiente de elasticidade k_e . Desprezar a massa da cremalheira, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} . O redutor tem uma relação de transmissão i_R e um rendimento η_R . O sistema carroto-cremalheira tem uma relação de transmissão i_{CC} e um rendimento η_{CC} .



a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear x** .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na **alínea b)**, $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$, $K=10$ e $\tau_e=1\text{ms}$. Considere que a FT obtida na **alínea a)**, tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor -10s^{-1} e -100s^{-1} .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1.

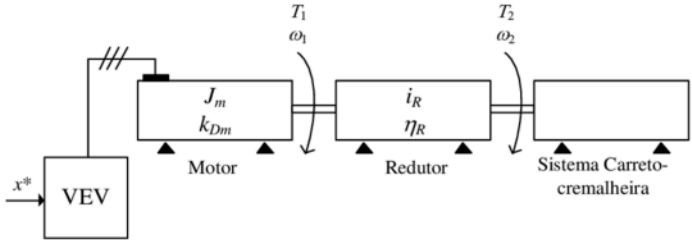


Figura A.1

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1) T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

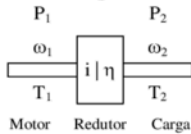


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) para a relação de transmissão.

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

Relação entre binário e força do sistema carroto-cremalheira (Figura B) (5). O sistema carroto-cremalheira permite a conversão de um movimento rotativo em linear.

$$\eta_{CC} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{CC} P_2 \Leftrightarrow v F = \eta_{CC} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

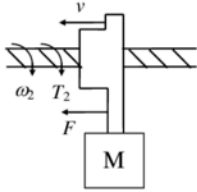


Figura B

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) para a relação de transmissão.

$$i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} \Leftrightarrow F = i_{CC} \eta_{CC} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (6)$$

$$i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força de inércia F resultante da massa M é obtida com (8). Esta força pode ser relacionada com a aceleração linear a , velocidade linear v e posição/deslocamento linear x .

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F = M \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8)$$

A força F_m (F_{m1} e F_{m2}) associada às duas molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (9). Resulta do coeficiente de elasticidade k_e e da posição/deslocamento linear x .

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} \Leftrightarrow F_m = k_e x + k_e x \Leftrightarrow F_m = 2k_e x \quad (9)$$

Com (8) e (9) é obtido o somatório de forças total F_T (10).

$$F_T = F + F_m \Leftrightarrow F_T = M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x \quad (10)$$

Resolução para controlo de posição x :

Substituir (10) em (6) para obter (11).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (11)$$

Substituir (11) em (3) para obter (12).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (12)$$

Resolver (4) em ordem a ω_1 com a substituição de (7) para obter (13).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{CC} v} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (13)$$

Derivando a ordem ao tempo (13) para obter (14).

$$\omega_l = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_l}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear v com o deslocamento x é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (12) em (1) com (13), (14) e (15) para obter (16).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_l}{dt} + k_{Dm} \omega_l + T_1 \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{\frac{v}{\frac{dx}{dt}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)} \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \end{aligned} \quad (16)$$

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear x** .

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17).

$$\begin{aligned} T_m &= \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{TL} \\ T_m(s) &= s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{CC} X(s) + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} X(s) \Leftrightarrow \\ T_m(s) &= \left[s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{s^2 \left(J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} \end{aligned} \quad (17)$$