

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s\omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s\omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s)\omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega = \omega_s(1-s) \quad (24)$$

Calcular o escorregamento para as condições nominais com (25). De acordo com o enunciado do problema,  $f_n=50\text{Hz}$  e  $N_n=1460\text{rpm}$ . A velocidade angular de sincronismo é calculada com (26), com o número de par de pólos  $n_{pp}=2$ .

$$s = \frac{\omega_s - \omega_n}{\omega_s} \xrightarrow[\omega_n = 1460 \times 2\pi / 60 \text{ rads}^{-1}]{\omega_s = 2\pi \times 50 / 2 \text{ rads}^{-1}} s = \frac{\frac{2\pi \times 50}{2} - 1460 \times \frac{2\pi}{60}}{\frac{2\pi \times 50}{2}} \Leftrightarrow s = 0,0267 \quad (25)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi f_n}{n_{pp}} \xrightarrow[n_{pp}=2]{f_n=50\text{Hz}} \omega_s = \frac{2\pi \times 50}{2} \approx 157,08 \text{ rads}^{-1} \quad (26)$$

Cálculo da velocidade angular de sincronismo para a frequência imposta pelo ondulator de tensão ( $f=30\text{Hz}$ ) (27). **A frequência  $f=30\text{Hz}$  representa a frequência fundamental da primeira harmónica da tensão composta  $u_{12}$**  (Figura E).

$$\omega_{s30\text{Hz}} = \frac{2\pi f_{30\text{Hz}}}{n_{pp}} \Leftrightarrow \omega_{s30\text{Hz}} = \frac{2\pi \times 30}{2} \Leftrightarrow \omega_{s30\text{Hz}} = 94,24 \text{ rads}^{-1} \xrightarrow[\times \frac{60}{2\pi}]{N_{s30\text{Hz}}} N_{s30\text{Hz}} = 900 \text{ rpm} \quad (27)$$

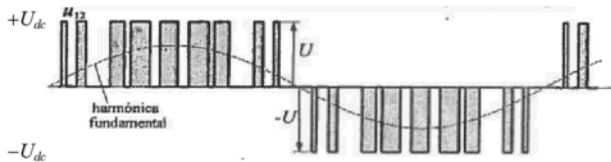


Figura E: Exemplo da evolução temporal da tensão composta  $u_{12}$  e respectiva primeira harmónica.

Calcular a velocidade com (24) para obter (28).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \xrightarrow[\omega_s = \omega_{s30\text{Hz}}]{\omega = \omega_{s30\text{Hz}}} s = \frac{\omega_{s30\text{Hz}} - \omega_{s30\text{Hz}}}{\omega_{s30\text{Hz}}} \Leftrightarrow \omega_{s30\text{Hz}} - \omega_{s30\text{Hz}} = s\omega_{s30\text{Hz}} \Leftrightarrow \omega_{s30\text{Hz}} = \omega_{s30\text{Hz}}(1-s) \xrightarrow[s=0,0267]{\omega_{s30\text{Hz}}=94,24 \text{ rads}^{-1}} \omega_{s30\text{Hz}} = 94,24 \times (1-0,0267) \Leftrightarrow \omega_{s30\text{Hz}} = 91,74 \text{ rads}^{-1} \xrightarrow[\times \frac{60}{2\pi}]{N_{s30\text{Hz}}} N_{s30\text{Hz}} = 876 \text{ rpm} \quad (28)$$

Calcular o binário com a velocidade de (28) para obter (29). Foi usado o coeficiente de atrito viscoso  $k_D=0,0941\text{Nms}$  (enunciado do problema).

$$T = k_D \omega_{s30\text{Hz}} \xrightarrow[k_D=0,0941\text{Nms}]{\omega_{s30\text{Hz}}=91,74} T = 0,0941 \times 91,74 \Leftrightarrow T = 8,63 \text{ Nm} \quad (29)$$

Calcular o rendimento de forma aproximada com (30). Foi usado o valor do escorregamento  $s$  calculado em (25).

$$\eta \approx 1-s \xrightarrow[s=0,0267]{} \eta \approx 1-0,0267 \Leftrightarrow \eta \approx 97,3\% \quad (30)$$

Código em Matlab para validar (24), (27), (28), (29) e (30).

```
clc; clear all;
fs=50; npp=2; Nn=1460;
ws=2*pi*fs/npp;
wn=Nn*2*pi/60;
s=(ws-wn)/ws; %Escorregamento nominal
```

```
fs30Hz=30;
ws30Hz=2*pi*fs30Hz/npp;
w30Hz=ws30Hz*(1-s);
N30Hz=w30Hz*60/(2*pi);

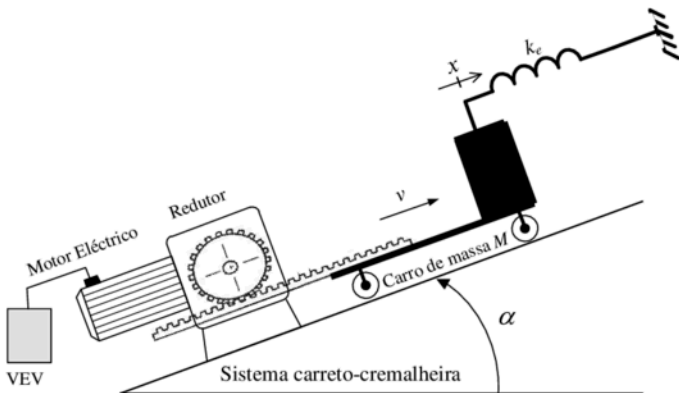
kD=0.0941;
T=kD*w30Hz;
eta=(1-s)*100; %Rendimento em %
```

```
clc;
fprintf('kD=%gNms-1\n', kD);
fprintf('w30Hz=%grads-1\n', w30Hz);
fprintf('N30Hz=%grpm\n', N30Hz);
fprintf('T=%gNm\n', T);
fprintf('eta=%g\n', eta);
```

```
kD=0.0941Nms-1
w30Hz=91.7345rads-1
N30Hz=876rpm
T=8.63222Nm
eta=97.3333
```

## Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carroto-cremalheira. Acoplado na extremidade da cremalheira existe um carro de massa  $M$ . Ligado ao carro de massa  $M$  existe uma mola com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ . Desprezar a massa da cremalheira. O alinhamento dos eixos da cremalheira e do carro de massa  $M$  forma um ângulo  $\alpha$  relativamente ao plano horizontal. O motor eléctrico tem momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema carroto-cremalheira tem uma relação de transmissão  $i_{CC}$  e um rendimento  $\eta_{CC}$ .



a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m = f(x)$ .

[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea anterior, dimensione os parâmetros de um **compensador PID**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere que a FT obtida na **alínea a)**, tem ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m=f(x)$ .

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1.

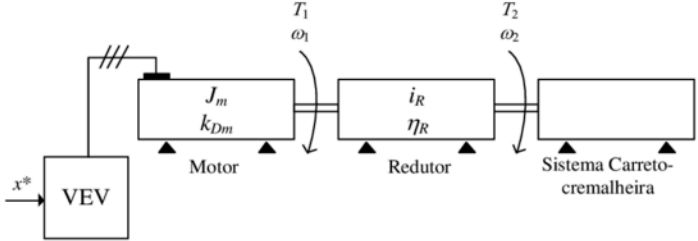


Figura A.1

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida com (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

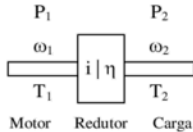


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) para a relação de transmissão.

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

Relação entre binário e força do sistema carroto-cremalheira (Figura B) com (5). O sistema carroto-cremalheira permite a conversão de um movimento rotativo em linear.

$$\eta_{CC} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{CC} P_2 \Leftrightarrow v F = \eta_{CC} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

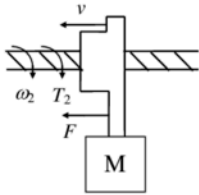


Figura B

Da equação (5) são obtidas as duas relações (6) e (7) para a relação de transmissão.

$$i_{cc} = \frac{F}{\eta_{cc} T_2} \Leftrightarrow F = i_{cc} \eta_{cc} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{cc} i_{cc}} \quad (6)$$

$$i_{cc} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A Figura C representa de forma esquemática o carro de massa  $M$  no plano inclinado. Para o ângulo  $\alpha$  são indicadas as três forças resultantes da massa  $M$ .

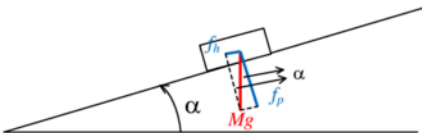


Figura C

A análise da figura C permite obter as relações (8) e (9) com a aceleração da gravidade  $g=9,8\text{ms}^{-2}$ . A força  $f_h$  tem a direcção do movimento e a força  $f_p$  é perpendicular ao plano inclinado. O peso do carro de massa  $M$  é igual a  $Mg$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{f_h}{Mg} \Leftrightarrow f_h = Mg \sin(\alpha) \quad (8)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{f_p}{Mg} \Leftrightarrow f_p = Mg \cos(\alpha) \quad (9)$$

A força de inércia  $F$  resultante da massa  $M$  é obtida com (10). Esta força  $F$  pode ser relacionada com a aceleração linear  $a$ , velocidade linear  $v$  e posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F = M \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (10)$$

A força  $F_m$  associada à mola, desprezando a sua própria massa é obtida por (11). Resulta do coeficiente de elasticidade  $k_e$  e da posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F_m = k_e x \quad (11)$$

Com (8), (10) e (11) é obtido o somatório de forças total  $F_T$  (12).

$$F_T = f_h + F + F_m \Leftrightarrow F_T = Mg \sin(\alpha) + M \frac{d^2 x}{dt^2} + k_e x \quad (12)$$

**Resolução para controlo de posição  $x$ :**

Substituir (12) em (6) para obter (13).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{Mg \sin(\alpha) + M \frac{d^2 x}{dt^2} + k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow$$

$$T_2 = \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (13)$$

Substituir (13) em (3) para obter (14).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (14)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_1$  com a substituição de (7) para obter (15).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{CC} v} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (15)$$

Derivando em ordem ao tempo (15) para obter (16).

$$\omega_1 = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

A relação entre a velocidade linear  $v$  com o deslocamento  $x$  é obtida por (17).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (17)$$

Substituir (14) em (1) com (15), (16) e (17) para obter (18).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)}$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \quad (18)$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow$$

$$T_m = \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}$$

**b)** O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

Passar para o domínio da frequência a equação (18) para obter (19).

$$\begin{aligned}
 T_m &= \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} - \tau_L \rightarrow \\
 T_m(s) &= s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{CC} X(s) + \frac{k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} X(s) + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\
 T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} &= \left[ s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Dividir (19) por  $\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)$  para simplificação e obter (20).

$$\begin{aligned}
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} \Leftrightarrow \tag{A} \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R i_{CC}}{\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)} + \frac{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC} k_e}{\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)}} \Leftrightarrow \tag{20} \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{k_e}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}
 \end{aligned}$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento com controlo da posição linear  $x$  de acordo com a Figura D.



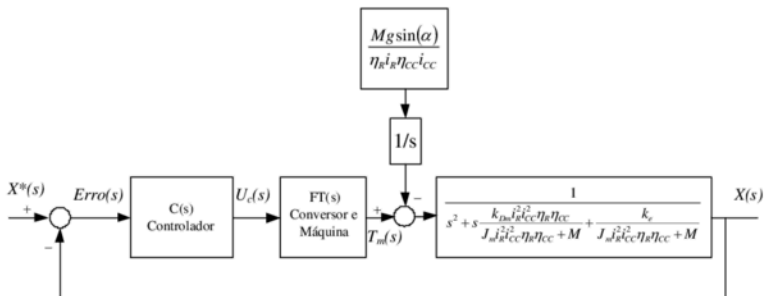


Figura D

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R cc i_{cc}}}$  representa a FT obtida na equação (20).

c) Para o diagrama de blocos da alínea anterior, dimensione os parâmetros de um **compensador PID**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere que a FT obtida na **alínea a)**, tem ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema e a obtida em (20) com o sistema carroto-cremalheira, carro de massa  $M$  e mola é obtida com (21).

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R cc i_{cc}}} = \frac{1}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{cc}^2 \eta_R \eta_{cc}}{J_m i_R^2 i_{cc}^2 \eta_R \eta_{cc} + M} + \frac{k_e}{J_m i_R^2 i_{cc}^2 \eta_R \eta_{cc} + M}} \Rightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R cc i_{cc}}} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \quad (21)$$

Desenvolvendo (21) de forma a ficar compatível com a FT do compensador PID (22).

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{50}{10 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) 100 \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{50}{1000 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \quad (22)$$

Função de Transferência do compensador PID obtida com (23). É caracterizada por um ganho  $k_c$  e duas constantes de tempo, respectivamente  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s} \quad (23)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a **FT do sistema global seja de segunda ordem**, uma solução é utilizar os dois zeros do compensador (23) para anular os pólos da FT (22). Ou seja, os dois zeros serão obtidos com (24) e (25).

$$\tau_1 = \frac{1}{10} \quad (24)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{100} \quad (25)$$

Função de transferência da cadeia de acção do sistema obtida com (26).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times \frac{k_e}{1 + s\tau_e} \times \frac{100}{1} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100}}{s(1 + s\tau_e)} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)} \quad (26)$$

Função de transferência global do sistema em cadeia fechada obtida com (27).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)} \times \frac{100s(1 + s\tau_e)}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 100\tau_e + 100s + 5k_c k_e} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{\frac{s^2 100\tau_e}{100\tau_e} + \frac{100s}{100\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}} \Leftrightarrow \frac{5k_c k_e}{100\tau_e} \quad (27)$$

$$FT_{CF} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{s^2 + s \frac{1}{\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}$$

Para dimensionar  $k_c$  (29) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

$$(28) \text{ com um factor de amortecimento de } \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$