

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».

La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70% de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »

B : « La bouteille d'eau provient de la source B »

S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

- 1) Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
- 2) Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
- 3) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
- 4) Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95% la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type 1,6.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ .

- 1) Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre 6,4 mg et 9,6 mg.
- 2) Calculer la probabilité $p(X \leq 6,5)$.
- 3) Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est 0,1.

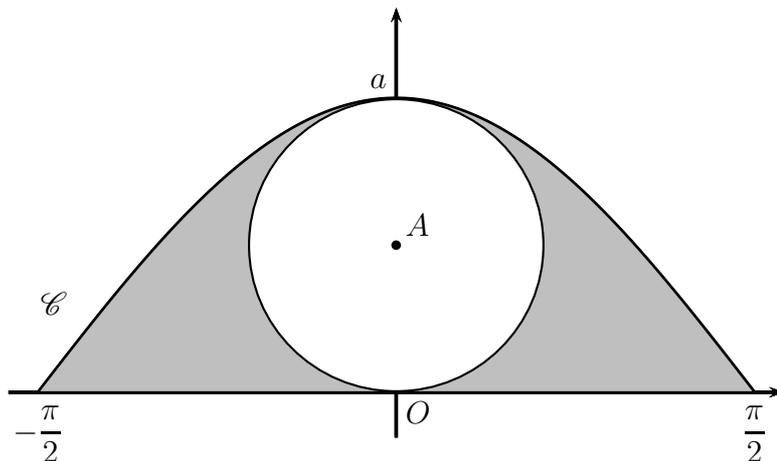
Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} d'équation $y = a \cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe \mathcal{C} pour des valeurs de a inférieures à 1, 4.

- 1) Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe \mathcal{C} est égale à $2a$ unités d'aire.
- 2) Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



EXERCICE 2 (3 points)**(commun à tous les candidats)**

Pour chaque réel a , on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

- 1) Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a possède un minimum.
- 2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

EXERCICE 3 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \quad (x + y + z = 1) \Rightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \right)$$

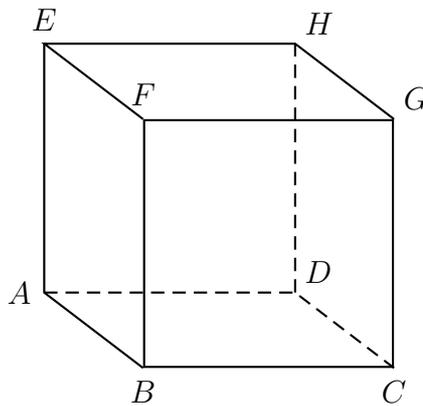
$$(P_2) \quad \left(x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \right) \Rightarrow (x + y + z = 1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- 1)
 - a) Vérifier que le plan d'équation $x + y + z = 1$ est le plan (BDE) .
 - b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .
 - c) Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.
- 2) Le triangle BDE est-il équilatéral ?
- 3) Soit M un point de l'espace.
 - a) Démontrer que si M appartient au plan (BDE) , alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
 - b) En déduire que si M appartient au plan (BDE) , alors $AM^2 \geq AK^2$.
 - c) Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x; y; z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

- 1) Calculer d_1 et a_1 .
- 2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

<i>Variables :</i>	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
<i>Initialisation :</i>	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
<i>Traitement :</i>	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
<i>Sortie :</i>	Afficher D Afficher A

- a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1) ?
 - b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
- 3) a) Pour tout entier naturel n , on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
- b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
 - c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
- 4) On admet que pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

- a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.
- b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.
- c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.
- d) Étudier la convergence de la suite (a_n) .