INTERVALLE DE FLUCTUATION AU SEUIL DE 95 % D'UNE LOI BINOMIALE

TI-83 Premium CE

1. Objectifs

La situation est la suivante : une loi binomiale X de paramètres n et p étant donnée, déterminer un intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de cette variable aléatoire, c'est-à-dire un intervalle $[a\,;b]$, où a et b sont des entiers compris entre 0 et n, ayant une probabilité d'au moins 95 % d'être réalisé par la variable aléatoire.

On écrira un algorithme pour déterminer l'intervalle de fluctuation demandé dans les classes de premières générales de lycée. On cherchera comment améliorer cet algorithme.

On examinera quelques exemples d'application à la prise de décision.

2. Plusieurs intervalles de fluctuation…

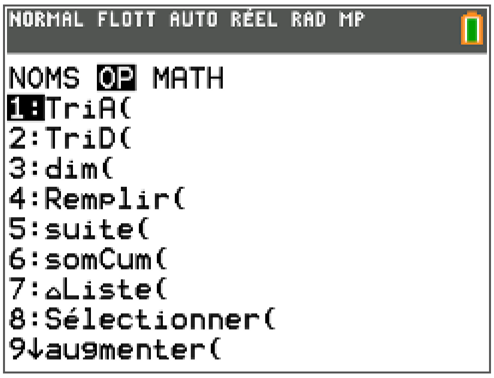
1) On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}3$.

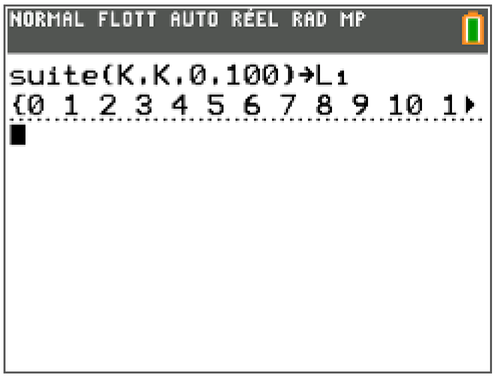
a) Pourquoi l'intervalle [0 ; n] est-il un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % ?

b) Déterminer la plus petite valeur de c tel que l'intervalle [0 ; c] soit un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Indication pour l'utilisation de la calculatrice

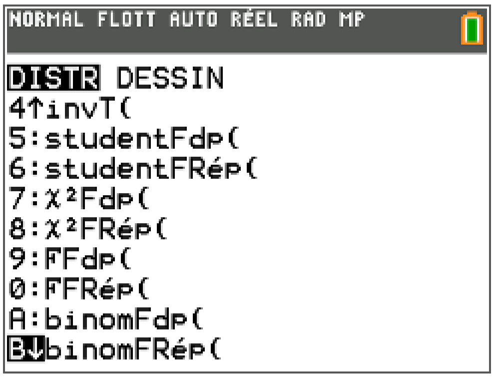
On commence par mémoriser dans la liste [L1] la liste des entiers de 0 à 100, pour que la lecture des probabilités soit facilitée. L'instruction **suite** s'obtient dans le menu 2nde stats et on choisit l'onglet **OP** :

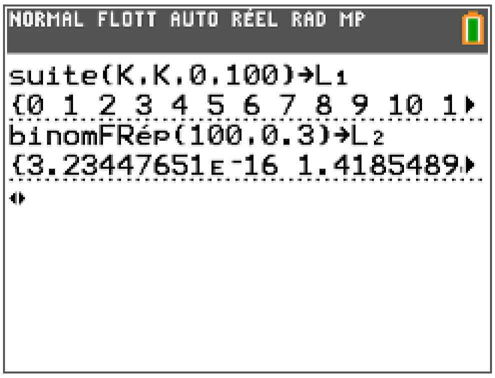




Enfin, dans la liste] , on met les valeurs cumulées de la loi binomiale, autrement dit pour k variant de 0 à 100, les valeurs $P(X \leq k)$.

On va cette fois dans le menu 2nde var (soit [distrib]) et on choisit **binomFRéP(** : quand on ne choisit comme paramètres que $n = 100$ et $p = 0{,}3$, sans préciser de valeur particulière, la calculatrice renvoie dans une liste l'ensemble des valeurs correspondant à la loi binomiale considérée.





c) Quel est le défaut de cet intervalle de fluctuation ?

2) a) Quelle est l'espérance mathématique *m* de la variable aléatoire *X* ?

b) Déterminer la plus petite valeur de *s* tel que l'intervalle [*m* – *s* ; *m* + *s*] soit un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. On pourra, par exemple, dans $\mathbf{Y_1}$ saisir la fonction définie par :

binomFRéP(100,0.3,30+X)–binomFRéP(100,0.3,30–X–1)

et utiliser la table des valeurs de cette fonction.

3. L'intervalle de fluctuation du programme

On considère une variable aléatoire *X* suivant la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.
Le programme des classes de premières S et ES demande de considérer l'intervalle [*a* ; *b*] tel que :

a est le *plus petit entier* tel que $P(X \le a) > 2,5\,\%$

b est le *plus petit entier* tel que $P(X \le b) \ge 97,5\,\%$

1) a) Montrer que l'intervalle $[a\,;b]$ est bien un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. c'est-à-dire que $P(X \in [a\,;b]) \ge 95\,\%$.

b) En déduire l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès (c'est-à-dire de la variable aléatoire $\frac{X}{n}$) au seuil de 95 %.

2) a) Déterminer à l'aide de la fonction **binomFrep** de la calculatrice les valeurs de *a* et *b* correspondant à la loi binomiale de paramètres *n* = 100 et *p* = 0,3.

b)Même question avec la loi binomiale de paramètres *n* = 900 et *p* = 0,6.

3) On se propose d'écrire un algorithme qui, à partir de l'entier *n* et de la probabilité *p* (paramètres de la loi binomiale considérée) renvoie les valeurs de *a* et *b*, en balayant tous les entiers depuis 0.

a) Compléter l'algorithme suivant écrit en langage naturel :

```
Saisir n et p
K prend la valeur 0
R prend la valeur P(X≤K)
Tant que R≤……
        K prend la valeur ……..
        R prend la valeur P(X≤K)
Fin du tant que
A prend la valeur K
Afficher ……..
Tant que R……………..
        ………………………..
        ……………………….
Fin du tant que
………………………
Afficher B
Afficher P(A≤X≤B)
```

b) Saisir ce programme sur la calculatrice.

c) Faire fonctionner ce programme pour les deux lois binomiales considérées précédemment, la première de paramètres n = 100 et p = 0,3, la seconde de paramètres n = 900 et p = 0,6.

d) Prolongement facultatif : amélioration de cet algorithme (voir le corrigé).

3. Application à une prise de décision

1) a) Si on jette une pièce parfaite 1 000 fois, donner un intervalle du nombre de « pile » obtenu qui arrive dans 95 % des cas.

b) Si Théo a obtenu 560 fois la face « pile », peut-on le soupçonner d'avoir triché ?

2) Un exercice classique de prise de décision

En novembre 1976, dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison. Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine.
Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien-fondé de la requête de l'accusé. En vous situant dans le rôle de cet expert, pouvez-vous décider si les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurés de ce comté ?