Méthode sur les équations différentielles

Résolution avec second membre

Position du problème

L'énoncé introduit une équation différentielle avec second membre (par exemple $y' + 2y = e^x + 3$) et pose des questions destinées à la résoudre.
Ces questions sont pratiquement toujours les mêmes, mais n'ont pas forcément le même ordre que celui donné dans le principe suivant.

Principe

Pour résoudre l'équation avec second membre (E) on demande de :
a) Résoudre l'équation sans second membre(E') [le second membre est nul].
b) Montrer qu'une fonction g est solution de (E).
c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').
d) En déduire les solutions de (E).

Exercice concret

Résolution de $y' + 2y = e^x + 3$ (E)
a) Résoudre $y' + 2y = 0$ (E')
b) Déterminer a et b de façon à ce que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ae^x + b$ soit solution de (E)
c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E')
d) En déduire les solution $\mathscr{S}$ de (E)

a) On applique la propriété du cours, on trouve que les solutions de (E') sont les fonctions $f_k(x) = ke^{-2x}$

b) Le principe de ce genre de question est de remplacer y par g et d'identifier alors les constantes.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = ae^x$
On en déduit que $f'(x) + 2f(x) = ae^x + 2(ae^x + b) = 3ae^x + 2b$
f sera donc solution de (E) si $3ae^x + 2b = e^x + 3$ c'est-à-dire si a et b vérifient :

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 2b=3 \end{cases}$$

c'est-à-dire pour $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{3}{2}$
On a donc : $g(x) = \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{3}{2}$

c) $f - g$ est solution de (E')
$\iff (f(x) - g(x))' + 2\left(f(x) - g(x)\right) = 0$
$\iff f'(x) + 2f(x) - g'(x) - 2g(x) = 0$
$\iff f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$
$\iff f'(x) + 2f(x) = e^x + 3$

(On a $g'(x) + 2g(x) = e^x + 3$ car g est solution de l'équation avec second membre)
$\iff f$ solution de (E)

d) f solution de (E)
$\iff (f - g)$ solution de (E')

$\iff f - g = f_k$ d'après a)

$\iff f$ est définie par $f(x) = f_k(x) + g(x) = ke^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{3}{2}$