

∞ **Baccalauréat S Antilles-Guyane** ∞  
**7 septembre 2017**

**EXERCICE 1**

**7 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

**Partie A**

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée  $p$ .

Pour une journée donnée, on note :

- $E$  l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- $V$  l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

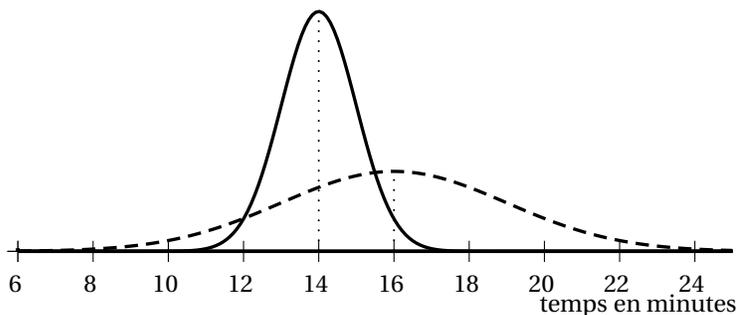
3. On constate que dans 67,5% des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
  - a. Calculer la valeur de  $p$ .
  - b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est  $\frac{1}{3}$ .

**Partie B**

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire  $T_V$  suivant une loi normale d'espérance  $\mu_V$  et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire  $T_C$  suivant une loi normale d'espérance  $\mu_C$  et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme  $\mathcal{C}_C$  et  $\mathcal{C}_V$  les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires  $T_V$  et  $T_C$  représentées dans la figure ci-dessous.  
Déterminer, en justifiant votre réponse,  $\mu_V$  et  $\mu_C$ .



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à  $10^{-4}$ .
3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail?

### Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée  $X$ , suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

1. Soit  $b$  un réel positif.  
Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
  - a. En déduire la valeur exacte de  $\lambda$ .
  - b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

### Exercice 2

3 points

#### Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par

$$\begin{cases} z_0 &= 100 \\ z_{n+1} &= \frac{i}{3} z_n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les points  $O$ ,  $M_n$  et  $M_{n+2}$  sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre  $A$  et de rayon  $r$ , où  $r$  est un nombre réel positif, est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $AM \leq r$ .  
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points  $M_n$  appartiennent au disque de centre  $O$  et de rayon 1.

### Exercice 3

5 points

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]1 ; +\infty[$  telle que, pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

- Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale.
- Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
- Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \, dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- Démontrer que  $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$ .  
Interpréter graphiquement ce résultat.
- Prouver que, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

- En déduire que, pour **tout entier naturel**<sup>1</sup>  $n$ , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1; 1; 14)$ ,  $B(0; 1; 8)$  et  $C(-2; 2; 4)$  ainsi que le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Justifier que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.
  - Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
  - Démontrer que le plan  $(ABC)$  a pour équation cartésienne  $6x + 8y - z = 0$ .
- On considère la droite  $\Delta$  des points  $M$  dont les coordonnées  $(x; y; z)$  sont données par

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - \frac{1}{2}, \\ z = 4t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Donner un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .
  - La droite  $\Delta$  et le plan  $(ABC)$  sont-ils sécants?
- Dans cette question, on considère l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  dont les coordonnées  $(x; y; z)$  sont données par

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1, \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer qu'il existe un unique point  $M$  qui appartient à la fois à  $(E)$  et à  $(ABC)$ .

Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

1. tout entier naturel non nul semble plus correct

**Exercice 4**  
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**5 points**

1. Soit  $p$  un entier relatif donné.  
 On s'intéresse dans cette question à l'équation  $(E_p)$

$$3x + 4y = p$$

où  $(x; y)$  est un couple d'entiers relatifs.

- a. Vérifier que le couple  $(-p; p)$  est une solution particulière de l'équation.  
 b. Démontrer que l'ensemble des solutions de  $(E_p)$  est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p + 4k; p - 3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
 On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

2. Soit  $M_0$  un point de coordonnées  $(x_0; y_0; z_0)$  qui appartient au plan  $\mathcal{P}$  et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.  
 a. Démontrer que  $z_0$  est pair.  
 b. On pose  $z_0 = 2p$  où  $p$  est un entier relatif.  
 Prouver que le couple  $(x_0; y_0)$  est solution de l'équation  $(E_p)$ .  
 c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan  $\mathcal{P}$  à coordonnées entières.  
 3. À tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , on associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y'; z')$  avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que  $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$ .  
 b. En déduire que si le point  $M$  est un point du plan  $\mathcal{P}$ , alors le point  $M'$  est aussi un point du plan  $\mathcal{P}$ .  
 c. Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  passant par  $O$ .  
 Montrer que si le point  $M$  appartient à  $\Delta$ , alors le point  $M'$  appartient aussi à  $\Delta$ .