

Enoncé n°13

Déterminez les entiers naturels n tels que $n^4 + 4$ soit premier.

Corrigé n°13

Factorisons d'abord $n^4 + 4$:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 - 4n^2 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$$

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

Il faut que les deux facteurs soient premiers.

Comme le premier facteur est un entier supérieur à 2, on a nécessairement

$n^2 - 2n + 2 = 1$ si $n^4 + 4$ est premier, d'où $n = 1$, ce qui implique

$n^4 + 4 = 5$ qui est premier.

En conséquence, la réponse n'est que $n = 1$.