Exercice Mathématiques n°2
Date : 26 / 06 / 2013

par Laurae

Enoncé n°2

Déterminer la valeur exacte de la somme suivante :

$$C = cos\left(\frac{\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{13\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{15\pi}{17}\right)$$

Indication : vous pouvez passer par les nombres complexes.

Corrigé n°2

On remarque qu'on est sûr que C soit un nombre réel.
Transformons d'abord la somme C en une somme de nombres complexes, dont on d'oit déterminer sa partie réelle.

$$C = Re\left(e^{i\frac{\pi}{17}} + e^{i\frac{3\pi}{17}} + e^{i\frac{5\pi}{17}} + e^{i\frac{7\pi}{17}} + e^{i\frac{9\pi}{17}} + e^{i\frac{11\pi}{17}} + e^{i\frac{13\pi}{17}} + e^{i\frac{15\pi}{17}}\right)$$

On remarque une suite géométrique, avec comme premier terme $e^{i\frac{\pi}{17}}$, et de raison $e^{i\frac{2\pi}{17}}$.

En conséquence, on en déduit que par multiplication du numérateur par $e^{i\frac{8\pi}{17}}$ et du dénominateur par $e^{i\frac{\pi}{17}}$:

$$C = Re\left(e^{i\frac{\pi}{17}} * \left(\frac{1 - e^{i\frac{16\pi}{17}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{17}}}\right)\right) = Re\left(e^{i\frac{8\pi}{17}} * \left(\frac{e^{i\frac{8\pi}{17}} - e^{-i\frac{8\pi}{17}}}{e^{i\frac{\pi}{17}} - e^{-i\frac{\pi}{17}}}\right)\right)$$

En appliquant la formule d'Euler qui dit que :

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \quad et \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

On a alors :

$$C = Re\left(e^{i\frac{8\pi}{17}} * \left(\frac{sin\left(\frac{8\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}\right)\right) = \frac{cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) * sin\left(\frac{8\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{\frac{1}{2} * sin\left(\frac{16\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{1}{2}$$