Exercice 1 ***4 points***

1. **Réponse C.** $f'(x) = -3 \times \mathrm{e}^{-3x} + 0 = -3\mathrm{e}^{-3x}$
2. **Réponse D.** Soit $t\%$ ce taux d'évolution et CM le coefficient multiplicateur correspondant à ce taux. On a $4 \times CM^7 = 15$ donc $CM^7 = 3,75$ donc $CM = (3,75)^{\frac{1}{7}} \approx 1,208$.
   Le taux associé au coefficient multiplicateur de 1,208 est 20,8 %
3. **Réponse A.** $P(X \geqslant 12,5) = \dfrac{1}{2} + P(12,5 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,58$
4. **Réponse B.** $P(X \leqslant 15,5) = \dfrac{15,5-14}{16-14} = 0,75$

Exercice 2 ***5 points***

1. $a_1 = 1,02 \times a_0 - 100 = 1,02 \times 2000 - 100 = 1940$ $a_2 = 1,02 \times a_1 - 100 = 1,02 \times 1940 - 100 = 1878,8$
2. **a.** L'augmentation de 2% se traduit par une multiplication par 1,02. Le retrait de 100 kg d'algues se traduit par une soustraction de 100. Donc $a_{n+1} = 1,02 \times a_n - 100$.

   b. $$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 5000 \\ &= 1,02a_n - 100 - 5000 \\ &= 1,02(b_n + 5000) - 5100 \\ &= 1,02b_n + 5100 - 5100 \\ &= 1,02b_n \end{aligned}$$
   donc la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,02.
   Son premier termne vaut $b_0 = a_0 - 5000 = 2000 - 5000 = -3000$.

   c. $b_n = b_0 \times 1,02^n = -3000 \times 1,02^n$.
   On sait de plus que $a_n = b_n + 5000$. Donc $a_n = -3000 \times 1,02^n + 5000 = 5000 - 3000 \times 1,02^n$.

   d. Lorsque n devient très grand, $1,02^n$ devient aussi très grand. Donc l'expression $5000 - 3000 \times 1,02^n$ deviendait rapidement inférieure à 0, ce qui signifie que les algues disparaissent.
3. **a.** Algorithme :

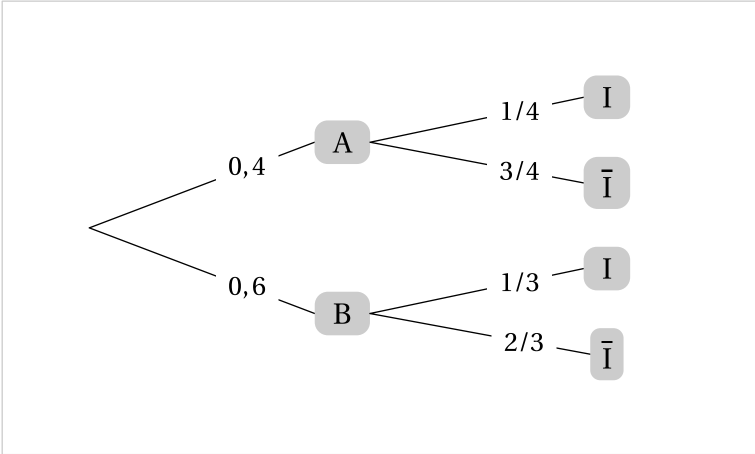
   $N \leftarrow 0$
   $A \leftarrow 2000$
   Tant que $A > 0$
   $\quad A \leftarrow 1,02 \times A - 100$
   $\quad N \leftarrow N + 1$
   Fin Tant que
   Afficher N

   b. À la calculatrice (par exemple en rentrant la fonction $f(x) = 5000 - 3000 \times 1,02^x$ et en utilisant la fonction Table), on trouve que $N = 26$.
4. **a.** $$\begin{aligned} 5000 - 3000 \times 1,02^n &\leqslant 0 \\ 5000 &\leqslant 3000 \times 1,02^n \\ \frac{5000}{3000} &\leqslant 1,02^n \\ \ln\frac{5}{3} &\leqslant \ln 1,02^n \quad \text{car le logarithme est une fonction croissante} \\ \ln\frac{5}{3} &\leqslant n \ln 1,02 \\ \frac{\ln\frac{5}{3}}{\ln 1,02} &\leqslant n \quad \text{car ln 1,02 est positif} \\ 25,79 &\leqslant n \end{aligned}$$

   b. On retrouve que c'est au bout de 26 jours que le propriétaire est débarrassé de ses algues.

Exercice 3

1. **a.** Arbre pondéré :



b. D'après la formule des probabilités totales, $P(I) = P(A \cap I) + P(B \cap I) = 0,4 \times \dfrac{1}{4} + 0,6 \times \dfrac{1}{3} = 0,3$

c. On sait que la guirlande choisie peut être utilisée en intérieur ou extérieur. C'est donc une condition sur $\overline{I}$. Calculons la probabilité que la lampe vienne de A, donc $P_{\overline{I}}(A)$.

$P_{\overline{I}}(A) = \dfrac{P(\overline{I} \cap A)}{P(\overline{I})} = \dfrac{\frac{3}{4} \times 0,4}{1 - 0,3} = \dfrac{0,3}{0,7} = \dfrac{3}{7}$

On en déduit donc que $P_{\overline{I}}(B) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$. Sachant qu'elle peut être utilisée en extérieur, il n'y a donc plus de chance qu'une guirlande provienne du fournisseur B que du fournisseur A.

2. Le prix moyen correspond à la somme du prix de chaque guirlande multiplié par sa probabilité (notion d'espérance). Donc $prix = 5 \times P(\overline{I}) + 3 \times P(I) = 5 \times 0,7 + 3 \times 0,3 = 4,4$.
Une guirlande prélevée au hasard coûte donc en moyenne 4,40 euros.

3. Pour calculer la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse, nous allons calculer la probabilité de l'évènement contraire : celui qu'aucune ne soit défectueuse.
$P = 0,98^{5}0 \approx 0,36$.
Donc la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse vaut environ 0,64.
(on peut aussi utiliser une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,02$)

4. La taille d'un intervalle de confiance calculé sur un échantillon de taille n vaut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Calculons la valeur de n telle que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,08$. Il faut donc

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{n}} &= 0,08 \\
2 &= 0,08 \times \sqrt{n} \\
25 &= \sqrt{n} \\
25^2 &= n \\
n &= 625
\end{aligned}$$

L'entreprise doit interroger au minimum 625 clients.

Exercice 4 ***6 points***

Partie A

1. En traçant la droite horizontale d'équation $y = 3000$, on trouve environ 6,8.
2. La portion comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$ comporte environ 11 unités d'aire. Chaque unité d'aire vaut 2000. Donc l'intégrale vaut environ 22000.

Partie B

1. $$\begin{aligned} f'(x) &= 1000 \times [1 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (x+5) \times (-0,2) \times \mathrm{e}^{-0,2x}] \\ &= 1000\mathrm{e}^{-0,2x}[1 + (x+5) \times -0,2] \\ &= 1000\mathrm{e}^{-0,2x}[1 - 0,2x - 1] \\ &= -200x\mathrm{e}^{-0,2x} \end{aligned}$$
2. Étudions le signe de f' sur [0 ;20]. Comme une expontentielle est toujours positive, f' est toujours négative.

   On en déduit donc le tableau de variations :

x	0	20
Variations de f	5000 ↘	458

3. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0;20]$. Elle est de plus strictement décroissante.

   $f(0) = 5000 > 3000$ et $f(20) \approx 458 < 3000$

   D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe un unique α dans l'intervalle $[0;20]$ tel que $f(\alpha) = 3000$.

   Par dichotomie, à la calculatrice, $\alpha \approx 6,88$.
4. $\int_2^8 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -5000(8+10)\mathrm{e}^{-0,2\times 8} - (-5000(2+10)\mathrm{e}^{-0,2\times 2}) = -90000\mathrm{e}^{-1,6} + 60000\mathrm{e}^{-0,4} \approx 22049$

Partie C

1. D'après la question A.1. ou B.3., le prix unitaire tel que la demande est supérieure à 3000 objets est égal à 6,88 euros.
2. $Moy_{[2;8]} f = \dfrac{1}{8-2}\displaystyle\int_2^8 f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{22049}{6} \approx 3675.$

   Interprétation : lorsque le prix de l'objet est entre 2 euros et 8 euros, la demande moyenne est de 3675 objets environ.