

Figura B – Sistema mecânico de conversão de movimento rotativo em linear.

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) para a relação de transmissão.

$$i_{cc} = \frac{F}{\eta_{cc} T_2} \Leftrightarrow F = i_{cc} \eta_{cc} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{cc} i_{cc}} \quad (6)$$

$$i_{cc} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A Figura C representa de forma esquemática o carro de massa  $M$  no plano inclinado. Para o ângulo  $\alpha$  são indicadas as três forças resultantes da massa  $M$ .

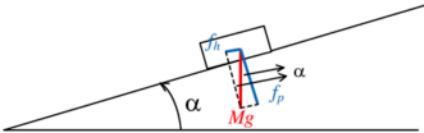


Figura C – Diagrama com os vectores das forças aplicadas ao carro de massa  $M$ .

A análise da figura C permite obter as relações (8) e (9) com a aceleração da gravidade  $g=9,8\text{ms}^{-2}$ . A força  $f_h$  tem a direcção do movimento e a força  $f_p$  é perpendicular ao plano inclinado. O peso do carro de massa  $M$  vale  $Mg$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{f_h}{Mg} \Leftrightarrow f_h = Mg \sin(\alpha) \quad (8)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{f_p}{Mg} \Leftrightarrow f_p = Mg \cos(\alpha) \quad (9)$$

A força de inércia  $F$  resultante da massa  $M$  é obtida com (10). Esta força pode ser relacionada com a aceleração linear  $a$ , velocidade linear  $v$  e posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F = M \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (10)$$

A força  $F_m$  ( $F_{m1}$  e  $F_{m2}$ ) associada às três molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (11). Resulta dos coeficientes de elasticidade  $k_{e1}$ ,  $k_{e2}$  e da posição/deslocamento linear  $x$ . Admitir que a força de tracção e compressão das três molas são iguais.

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} \Leftrightarrow F_m = k_{e1}x + k_{e1}x + k_{e2}x \Leftrightarrow F_m = 2k_{e1}x + k_{e2}x \Leftrightarrow F_m = (2k_{e1} + k_{e2})x \quad (11)$$

Com (8), (10) e (11) é obtido o somatório de forças total  $F_T$  (12).

$$F_T = Mg \sin(\alpha) + F + F_m \Leftrightarrow F_T = Mg \sin(\alpha) + M \frac{d^2 x}{dt^2} + (2k_{e1} + k_{e2})x \quad (12)$$

**Resolução para controlo de posição  $x$ :**

Substituir (12) em (6) para obter (13).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{Mg \sin(\alpha) + M \frac{d^2 x}{dt^2} + (2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$T_2 = \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2}}{\eta_{CC} i_{CC}} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_{CC} i_{CC}}$$

Substituir (13) em (3) para obter (14).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \quad (14)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_1$  com a substituição de (7) para obter (15).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{CC} v} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (15)$$

Derivando a ordem ao tempo (15) para obter (16).

$$\omega_1 = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

A relação entre a velocidade linear  $v$  com o deslocamento  $x$  é obtida por (17).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (17)$$

Substituir (14) em (1) com (15), (16) e (17) para obter (18).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)}$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \quad (18)$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow$$

$$T_m = \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}$$

**b)** O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

Passar para o domínio da frequência a equação (18) para obter (19).

$$\begin{aligned}
 T_m &= \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{TL} \\
 T_m(s) &= s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{CC} X(s) + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} X(s) + \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\
 T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} &= \left[ s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Dividir (19) por  $\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)$  para simplificação e obter (20).

$$\begin{aligned}
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{1}{\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \left( s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R i_{CC}}{\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)} + \frac{(2k_{e1} + k_{e2})}{\left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)} \right)} \Leftrightarrow \\
 \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_{e1} + k_{e2}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento com controlo da posição linear  $x$  de acordo com a Figura D.

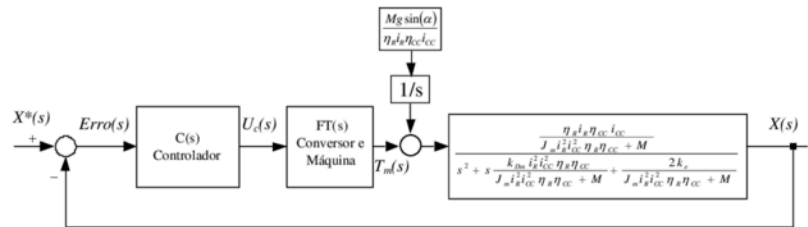


Figura D – Diagrama de blocos para controlo da posição linear  $x$ .

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa a FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $X(s)/\left[T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}\right]$  representa a FT obtida na equação (20).

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), realizando as simplificações necessárias, dimensionar os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ ,  $K=10$  e  $\tau_e=1ms$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10s^{-1}$  e  $-100s^{-1}$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema e a obtida em (20) com o sistema carroto-cremalheira, carro de massa  $M$  e as suas molas é obtida com (21).

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_{e1} + k_{e2}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}} \Rightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} &= \frac{50}{(s+10)(s+100)} \end{aligned} \quad (21)$$

Desenvolvendo (21) de forma a ficar acessível ao cancelamento dos pólos com o zero da FT do compensador PI (22).

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10\left(1+\frac{1}{10}s\right)100\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{Mg \sin(\alpha)}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} = \frac{50}{1000\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \quad (22)$$

A Função de Transferência do compensador PI é obtida com (23). É caracterizada por um ganho  $k_c$  e uma constante de tempo  $\tau_c$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1+s\tau_c)}{s} \quad (23)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema tem quatro pólos (Figura E): i) o pólo na origem do PI (24), ii) o pólo igual a  $-10$  (25), iii) o pólo igual a  $-100$  (26), iv) o pólo associado à constante de tempo do atraso estatístico  $\tau_e$  (27).

$$s = 0 \quad (24)$$

$$s = -10s^{-1} \quad (25)$$

$$s = -100s^{-1} \quad (26)$$

$$1+s\tau_e=0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\tau_e} \xrightarrow{\tau_e=1ms} s = -1000s^{-1} \quad (27)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, uma solução é: i) desprezar a dinâmica da constante de tempo  $\tau_e$  do atraso estatístico do conversor, ii) com o zero do PI cancelar o pólo dominante (o mais próximo da origem)  $s=-10$ .

**5.2.3 Simplificação de funções de transferência:** “Quando existem pólos no sistema muito afastados dos pólos dominantes (afastamento da ordem de 10 vezes a localização dos pólos dominantes), para a resposta do sistema, podem ser desprezados aqueles pólos localizados no interior do SCE (devendo ser mantido o ganho estático do referido sistema)”.

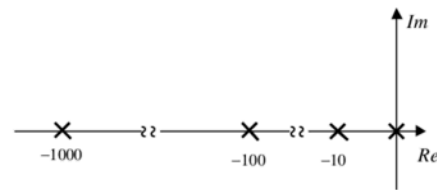


Figura E – Diagrama com lugar das raízes e pólos.

Utilizar o zero do compensador PI (23) para anular o pólo dominante em (22) e obter  $\tau_c$  (28).

$$\tau_c = \frac{1}{10}s^{-1} \quad (28)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema é obtida com (29).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times k_e \times \frac{\frac{5}{100}}{\left(1 + \frac{1}{100}s\right)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100}}{s \left(\frac{100+s}{100}\right)} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s)} \quad (29)$$

A função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (30).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{s(100+s)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{s(100+s)}} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s)} \times \frac{s(100+s)}{s(100+s) + 5k_c k_e} = \quad (30)$$

$$\frac{5k_c k_e}{s(100+s) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e} \Rightarrow FT_{CF} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e}$$

Para dimensionar  $k_c$  (32) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

(31) com um factor de amortecimento de  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\xi=\sqrt{2}/2} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2} \quad (31)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_o = 100 \\ \omega_o^2 = 5k_c k_e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_o = \frac{100}{2\xi} \\ \left(\frac{100}{2\xi}\right)^2 = 5k_c k_e \Leftrightarrow k_c = \frac{\left(\frac{100}{2\xi}\right)^2}{5k_e} \end{cases} \xrightarrow[k_c=5]{\xi=\sqrt{2}/2} k_c = \frac{\left(\frac{100}{2 \times \sqrt{2}/2}\right)^2}{5 \times 10} = 100 \quad (32)$$

Generalizar com o código de um sistema de duas equações.

```
%Formula Resolvente
clc; clear all;
syms x a b c;
solucao=solve('a*x^2+b*x+c=0'),
validar=a*(x-solucao(1))* (x-solucao(2)), %expand(validar)
```

```
%Formula Resolvente
%a*x^2+b*x+c=0
%x1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%x2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%a*x^2+b*x+c=a*(x-x1)*(x-x2),
```

Exemplo de código em Matlab para exemplificação da resposta de um sistema de 2ª ordem para uma entrada em escalão com o cálculo do factor de amortecimento  $\xi$ .

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
syms s;
expand((s+10)*(s+100)); %s^2+110*s+1000
```

```
wn=sqrt(1000);      %wn^2=1000;
fa=110/(2*wn),      %2*fa*wn=110
num=[0 0 1000];      %1000
den=[1 110 1000];    %s^2+100*s+1000
H=tf(num,den);
step(H,1); grid on;
```

```
%fa =      1.7393
```

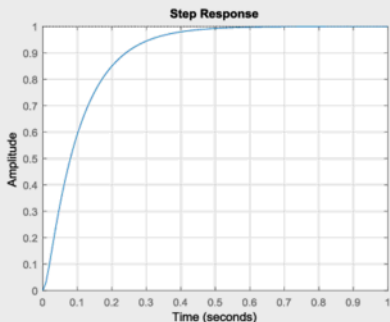


Figura F.0 – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 2ª ordem.

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
wn=sqrt(4000);      %wn^2=4000;
fa=120/(2*wn),      %2*fa*wn=120

num_1=[0 0 4000];    %4000
den_1=[1 120 4000];  %s^2+120*s+4000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ª ordem

num_2=[0 0 4000];    %4000
den_2=[0 120 4000];  %s^2+100*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ª ordem

step(H_1,H_2,0.3); grid on;
legend('2ª ordem', '1ª ordem');
```

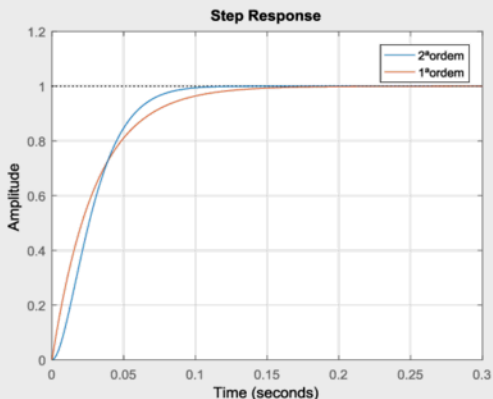


Figura F – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª e 2ª ordem.

Exemplo de código em Matlab para exemplificação do sistema de 1ª e 2ª ordem. Os parâmetros da função de transferência de 2ª ordem apresentam uma resposta praticamente idêntica a um sistema de 1ª ordem.

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
wn=sqrt(4000);    %wn^2=4000;
fa=120/(2*wn),    %2*fa*wn=120

num_1=[0 0 1000];    %1000
den_1=[1 110 1000];  %s^2+110*s+1000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ª ordem

num_2=[0 0 1000];    %1000
den_2=[0 110 1000];  %s^2+110*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ª ordem

subplot(3,1,1); pzmap(H_1); legend('2ª ordem');
subplot(3,1,2); pzmap(H_2); legend('1ª ordem');
subplot(3,1,3); step(H_1,H_2,1.0); grid on;
legend('2ª ordem', '1ª ordem');
```



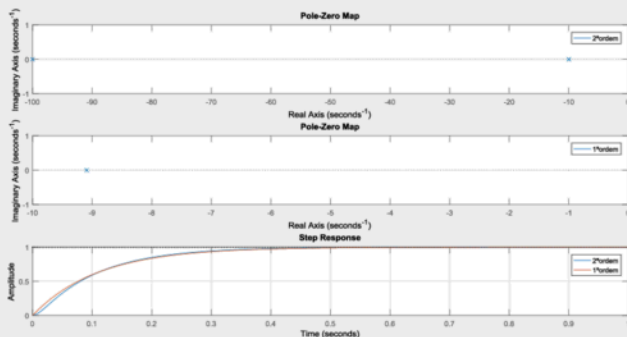


Figura G – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª e 2ª ordem com a localização das raízes e pólos.

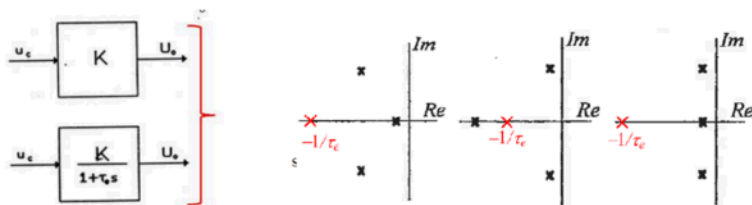


Figura H – Exemplo de dois sistemas representados por um ganho  $K$  e uma função de transferência de 1ª ordem (caracterizada com um ganho  $K$  e uma constante de tempo  $\tau_e$ ). Lugar das raízes de um sistema de 3ª ordem com diferentes localizações dos pólos.

Exemplo de código em Matlab para exemplificação do sistema de 1ª e caracterizado apenas com um ganho  $K$ . O valor do ganho  $K$  e a constante de tempo  $\tau_e$  estão indicados no código.

```
%Modelo para efeitos de controlo
clc; clear all;
K=1; %Ganho do conversor;
tao=1e-3; %Constante de tempo tao=1ms

num_1=[0 K];
den_1=[tao 1];
H_1=tf(num_1,den_1); %1ª ordem

num_2=[0 K];
den_2=[0 1];
H_2=tf(num_2,den_2); %desprezar tao
```

```
step(H_1,H_2,0.02); grid on; legend('1ªordem', 'K');
```

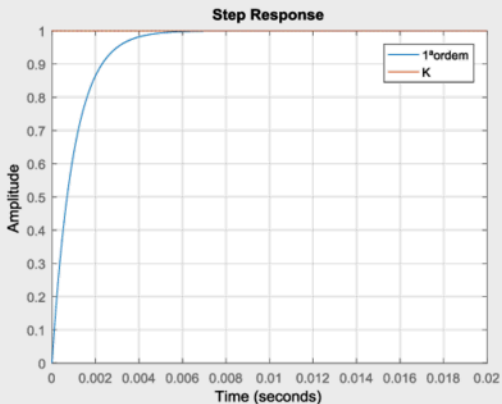


Figura H – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª ordem e sistema representado por um ganho  $K$ .

Fazer uma simulação numérica:

- i)  $U=U_o=U_{oav}$ ;
- ii) Com a FT;
- iii) Relacionar com a constante de tempo  $\tau_e$ ;
- iv) Com o modelo em Simulink (SimPowerSystems).