

Figura F – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª e 2ª ordem.

Exemplo de código em Matlab para exemplificação do sistema de 1ª e 2ª ordem. Os parâmetros da função de transferência de 2ª ordem apresentam uma resposta praticamente idêntica a um sistema de 1ª ordem.

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
wn=sqrt(4000); %wn^2=4000;
fa=120/(2*wn), %2*fa*wn=120

num_1=[0 0 1000]; %1000
den_1=[1 110 1000]; %s^2+110*s+1000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ª ordem

num_2=[0 0 1000]; %1000
den_2=[0 110 1000]; %s^2+110*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ª ordem

subplot(3,1,1); pzmap(H_1); legend('2ª ordem');
subplot(3,1,2); pzmap(H_2); legend('1ª ordem');
subplot(3,1,3); step(H_1,H_2,1.0); grid on;
legend('2ª ordem', '1ª ordem');
```

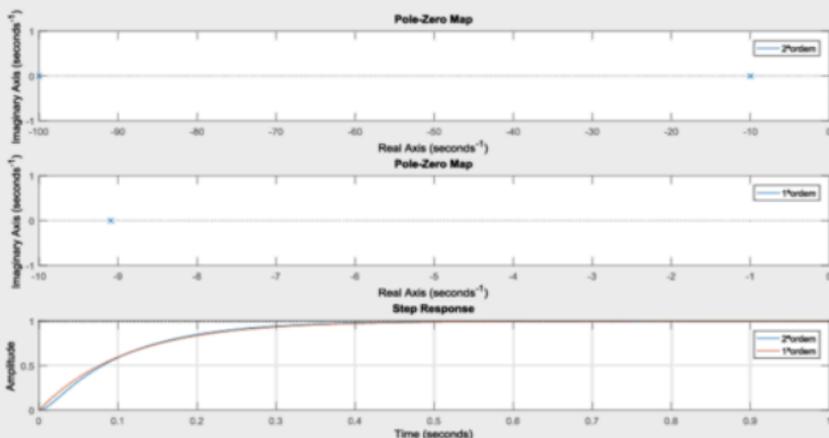


Figura G – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª e 2ª ordem com a localização das raízes e pólos.

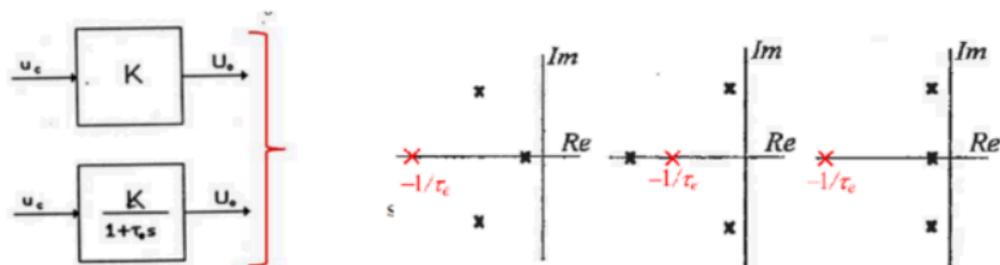


Figura H – Exemplo de dois sistemas representados por um ganho K e uma função de transferência de 1ª ordem (caracterizada com um ganho K e uma constante de tempo τ_e). Lugar das raízes de um sistema de 3ª ordem com diferentes localizações dos pólos.

Exemplo de código em Matlab para exemplificação do sistema de 1ª e caracterizado apenas com um ganho K . O valor do ganho K e a constante de tempo τ_e estão indicados no código.

```
%Modelo para efeitos de controlo
clc; clear all;
K=1;           %Ganho do conversor;
tao=1e-3;     %Constante de tempo tao=lms
```

```
num_1=[0 K];
den_1=[tao 1];
H_1=tf(num_1,den_1); %1ª ordem
```

```
num_2=[0 K];
den_2=[0 1];
H_2=tf(num_2,den_2); %desprezar tao
```

```
step(H_1,H_2,0.02); grid on; legend('1ª ordem', 'K');
```

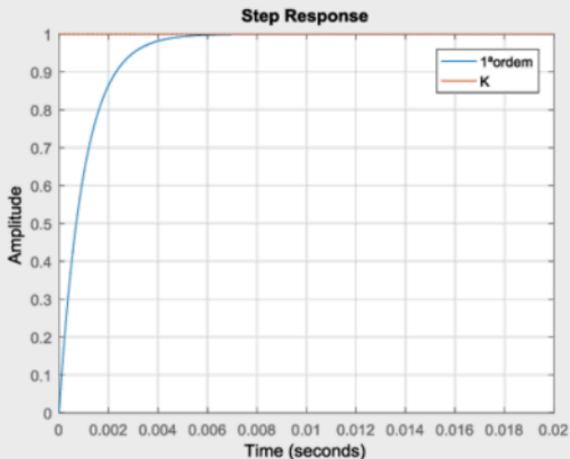


Figura H – Resposta para uma entrada em escalão do sistema de 1ª ordem e sistema representado por um ganho K .

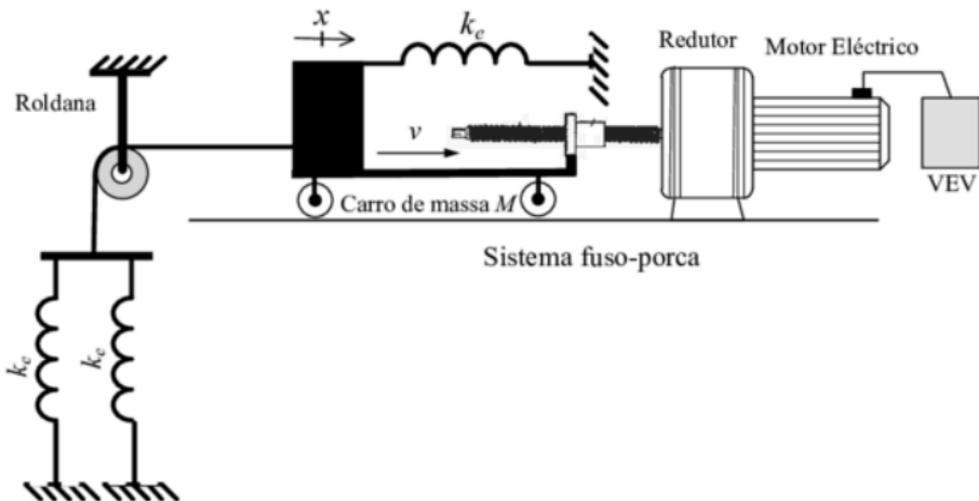
Fazer uma simulação numérica:

- i) $U=U_o=U_{oav}$;
- ii) Com a FT;
- iii) Relacionar com a constante de tempo τ_c ;
- iv) Com o modelo em Simulink (SimPowerSystems).

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema fuso-porca. Acoplado na extremidade da porca existe um carro de massa M . Ligado ao carro existem três molas iguais com o coeficiente de elasticidade k_c . Desprezar a massa da porca, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem o momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} . O redutor tem uma relação de transmissão i_R e um rendimento η_R . O sistema fuso-porca tem uma relação de transmissão i_{FP} e um rendimento η_{FP} .



a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

[cotação: 2

valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_c)$, em que K representa o ganho e τ_c a constante de tempo de atraso. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear x** .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b), $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_c)$, $K=10$ e $\tau_c=1$ ms. Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor $-10s^{-1}$ e $-100s^{-1}$.

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalaço</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m=f(x)$.

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1. Cada bloco representa um elemento do accionamento e com identificação dos seus parâmetros.

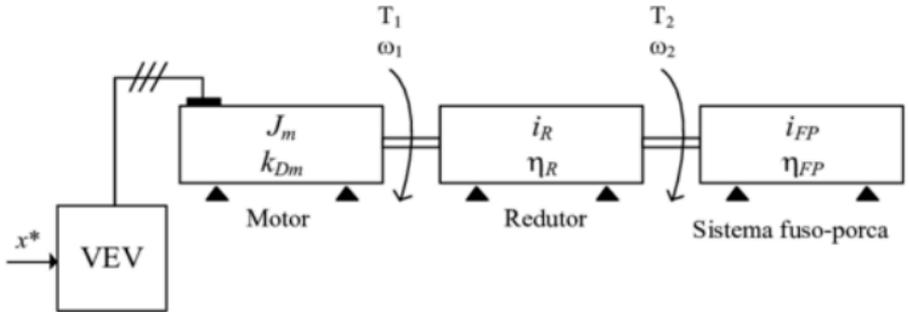


Figura A.1 – Esquema de blocos representativo do problema.

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm}\omega_1 + T_1 \tag{1}$$

Em (1) T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

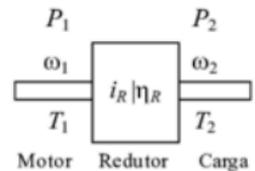


Figura A – Elemento redutor com identificação dos seus parâmetros.

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \tag{2}$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) com a relação de transmissão i_R .

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \tag{3}$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{4}$$

O sistema fuso-porca permite a conversão de um movimento rotativo em linear. Relação entre binário e força do sistema fuso-porca (Figura B) (5).

$$\eta_{FP} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{FP} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{FP} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \tag{5}$$

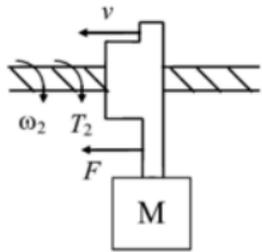


Figura B – Elemento mecânico para conversão do movimento rotativo em linear.

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) com a relação de transmissão i_{FP} .

$$i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} \Leftrightarrow F = i_{FP} \eta_{FP} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (6)$$

$$i_{FP} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força de inércia F resultante do carro de massa M é obtida com (8). Esta força pode ser relacionada com a aceleração linear a , velocidade linear v e posição/deslocamento linear x .

$$F_i = Ma \Leftrightarrow F_i = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F_i = M \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F_i = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8)$$

A força F_m (F_{m1} , F_{m2} e F_{m3}) associada às três molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (9). Resulta do coeficiente de elasticidade k_e e da posição/deslocamento linear x .

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} + F_{m3} \Leftrightarrow F_m = k_e x + k_e x + k_e x \Leftrightarrow F_m = 3k_e x \quad (9)$$

Com (8) e (9) é obtido o somatório de forças total F_T (10). Admite-se constante o coeficiente de elasticidade e igual para a tracção ou compressão da mola.

$$F_T = F_i + F_m \Leftrightarrow F_T = M \frac{d^2 x}{dt^2} + 3k_e x \quad (10)$$

Resolução para controlo de posição x com $T_m=f(x)$.

Substituir (10) em (6) para obter (11).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2} + 3k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{3k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (11)$$

Substituir (11) em (3) para obter (12).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{3k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (12)$$

Resolver (4) em ordem a ω_1 com a substituição de (7) para obter (13).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow[\substack{i_{FP} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = i_{FP} v \\ v}}{\omega_1 = i_R i_{FP} v} \omega_1 = i_R i_{FP} v \quad (13)$$

Derivando a ordem ao tempo (13) para obter (14).

$$\omega_1 = i_R i_{FP} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear v com o deslocamento x é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (12) em (1) com (13), (14) e (15) para obter (16).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_i \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3k_c x}{\eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow[\substack{v = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \\ T_m &= J_m i_R i_{FP} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3k_c x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3k_c x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow \\ T_m &= \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{3k_c x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \end{aligned} \quad (16)$$

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear x** .

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17) com as regras das transformadas de Laplace.

$$T_m = \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{3k_e x}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \xrightarrow{\text{TL}}$$

$$T_m(s) = s^2 \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{FP} X(s) + \frac{3k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} X(s) \Leftrightarrow$$

$$T_m(s) = \left[s^2 \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{3k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right] X(s) \Leftrightarrow \quad (17)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{3k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}}$$

Dividir (17) por $\left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)$ para simplificação e obter (18).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 \left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{3k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}} \Leftrightarrow \quad (A)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{\left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right) \left[s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R i_{FP}}{\left(J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right)} + \frac{3k_e}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}} \right]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP}}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M} + \frac{3k_e}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_R \eta_{FP} + M}} \quad (18)$$

Diagrama de blocos com uma possível solução para um sistema de accionamento com controlo da posição linear x , representada na Figura D.

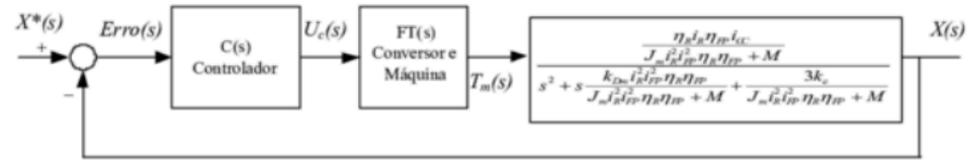


Figura D – Diagrama de blocos do accionamento para controlo da posição x .

- A FT $U_c(s)/Erro(s)$ representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.