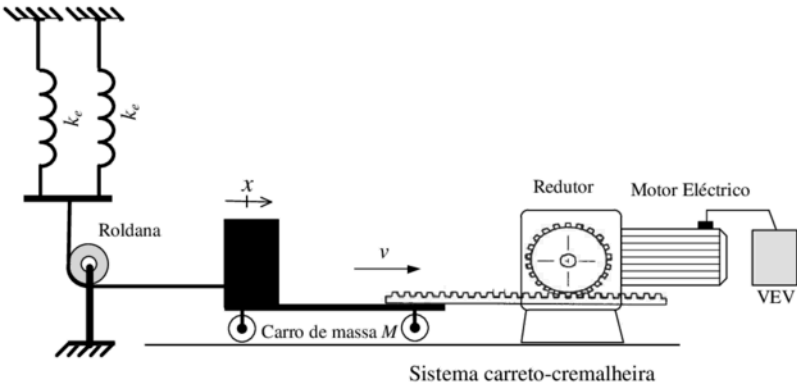


---

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32

## Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carroto-cremalheira. Acoplado na extremidade da cremalheira existe um carro de massa  $M$ . Ligado ao carro de massa  $M$  existem duas molas iguais com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ . Desprezar a massa da cremalheira, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema carroto-cremalheira tem uma relação de transmissão  $i_{CC}$  e um rendimento  $\eta_{CC}$ .



a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m=f(x)$ .

[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da posição linear  $x$ .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), realizando as simplificações necessárias, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s)=K/(1+s\tau_e)$ ,  $K=10$  e  $\tau_e=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10\text{s}^{-1}$  e  $-100\text{s}^{-1}$ .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema carroto-cremalheira indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m=f(x)$ .

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1.

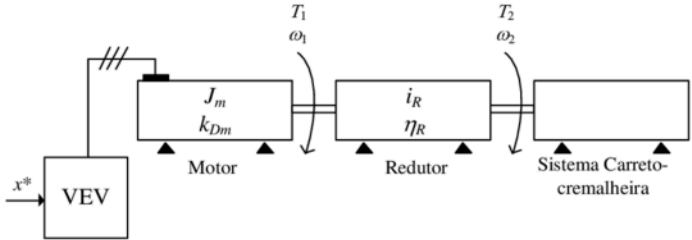


Figura A.1

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

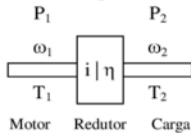


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) obtido com as potências mecânicas.

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) para a relação de transmissão.

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

Relação entre binário e força do sistema carroto-cremalheira (Figura B) (5). O sistema carroto-cremalheira permite a conversão de um movimento rotativo em linear.

$$\eta_{CC} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{CC} P_2 \Leftrightarrow v F = \eta_{CC} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

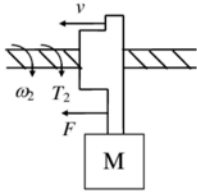


Figura B

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7) para a relação de transmissão.

$$i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} \Leftrightarrow F = i_{CC} \eta_{CC} T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (6)$$

$$i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força de inércia  $F$  resultante da massa  $M$  é obtida com (8). Esta força pode ser relacionada com a aceleração  $a$ , velocidade linear  $v$  e posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow F = M \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow F = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (8)$$

A força  $F_m$  ( $F_{m1}$  e  $F_{m2}$ ) associada às duas molas, desprezando a sua própria massa é obtida por (9). Resulta do coeficiente de elasticidade  $k_e$  e da posição/deslocamento linear  $x$ .

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} \Leftrightarrow F_m = k_e x + k_e x \Leftrightarrow F_m = 2k_e x \quad (9)$$

Com (8) e (9) é obtido o somatório de forças total  $F_T$  (10).

$$F_T = F + F_m \Leftrightarrow F_T = M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x \quad (10)$$

### Resolução para controlo de posição $x$ :

Substituir (10) em (6) para obter (11).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{F=F_T} T_2 = \frac{M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (11)$$

Substituir (11) em (3) para obter (12).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (12)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_1$  com a substituição de (7) para obter (13).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow \omega_2 = i_{CC} v} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (13)$$

Derivando a ordem ao tempo (13) para obter (14).

$$\omega_l = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_l}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear  $v$  com o deslocamento  $x$  é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (12) em (1) com (13), (14) e (15) para obter (16).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_l}{dt} + k_{Dm} \omega_l + T_l \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{\substack{v = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)}} \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= J_m i_R i_{CC} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow \\ T_m &= \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \end{aligned} \quad (16)$$

**b)** O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17).

$$\begin{aligned} T_m &= \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{CC} \frac{dx}{dt} + \frac{2k_e x}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \xrightarrow{TL} \\ T_m(s) &= s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) X(s) + s k_{Dm} i_R i_{CC} X(s) + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} X(s) \Leftrightarrow \\ T_m(s) &= \left[ s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right] X(s) \Leftrightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{1}{s^2 \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + s k_{Dm} i_R i_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}} \end{aligned} \quad (17)$$

Dividir (17) por  $\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)$  para simplificação e obter (18).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 \left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right) + s k_{Dm} \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}} \Leftrightarrow \quad (A)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)} \frac{2k_e}{s^2 + s \frac{k_{Dm} \dot{i}_R \dot{i}_{CC}}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)} + \frac{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_e}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}} \quad (18)$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento com controlo da posição linear  $x$ : de acordo com a Figura D.

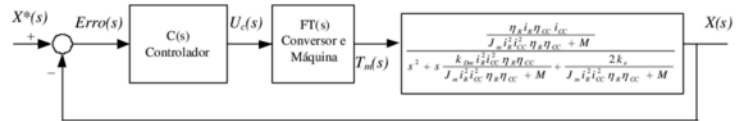


Figura D

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $\frac{X(s)}{T_m(s)}$  representa a FT obtida na equação (18).

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), realizando as simplificações necessárias, dimensione os parâmetros de um compensador PI, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere para a FT apresentada

na **alínea b)**,  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ ,  $K=10$  e  $\tau_e=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na **alínea a)**, tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema e a obtida em (18) com o sistema carro-cremalheira, carro de massa  $M$  e as suas molas é obtida com (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_e}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}} \Rightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \quad (19)$$

Desenvolvendo (19) de forma a ficar acessível ao cancelamento dos pólos com o zero da FT do compensador PI (20).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) 100 \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{1000 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{5}{100 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \quad (20)$$

A Função de Transferência do compensador PI é obtida com (21). É caracterizada por um ganho  $k_c$  e uma constante de tempo  $\tau_e$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1 + s\tau_e)}{s} \quad (21)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema tem quatro pólos (Figura E): i) o pólo na origem do PI (22), ii) o pólo igual a  $-10$  (23), iii) o pólo igual a  $-100$  (24), iv) o pólo associado à constante de tempo do atraso estatístico  $\tau_e$  (25).

$$s = 0 \quad (22)$$

$$s = -10\text{s}^{-1} \quad (23)$$

$$s = -100\text{s}^{-1} \quad (24)$$

$$1 + s\tau_e = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\tau_e} \xrightarrow{\tau_e=1\text{ms}} s = -1000\text{s}^{-1} \quad (25)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, uma solução é: i) desprezar a dinâmica da constante de tempo  $\tau_e$  do atraso estatístico do conversor, ii) com o zero do PI cancelar o pólo dominante (o mais próximo da origem)  $s=-10$ .

**5.2.3 Simplificação de funções de transferência:** “Quando existem pólos no sistema muito afastados dos pólos dominantes (*afastamento da ordem de 10 vezes a localização dos pólos dominantes*), para a resposta do sistema, podem ser desprezados aqueles pólos localizados no interior do SCE (devendo ser mantido o ganho estático do referido sistema)”.



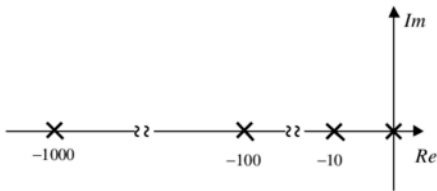


Figura E

Utilizar o zero do compensador PI (21) para anular o pólo dominante em (20) e obter  $\tau_c$  (26).

$$\tau_c = \frac{1}{10} \text{ s}^{-1} \quad (26)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema é obtida com (27).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times k_e \times \frac{5}{\left(1 + \frac{1}{100}s\right)} = \frac{5k_c k_e}{s \left(\frac{100+s}{100}\right)} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s)} \quad (27)$$

A função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (28).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{s(100+s)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{s(100+s)}} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s)} \times \frac{s(100+s)}{s(100+s) + 5k_c k_e} \quad (28)$$

$$\frac{5k_c k_e}{s(100+s) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e} \Rightarrow FT_{CF} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e}$$

Para dimensionar  $k_c$  (30) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

(29) com um factor de amortecimento de  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\xi=\sqrt{2}/2} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2} \quad (29)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_o = 100 \\ \omega_o^2 = 5k_c k_e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_o = \frac{100}{2\xi} \\ \left(\frac{100}{2\xi}\right)^2 = 5k_c k_e \Leftrightarrow k_c = \frac{\left(\frac{100}{2\xi}\right)^2}{5k_e} \end{cases} \xrightarrow[k_e=5]{\xi=\sqrt{2}/2} k_c = \frac{\left(\frac{100}{2 \times \sqrt{2}/2}\right)^2}{5 \times 10} = 100 \quad (30)$$

Generalizar com o código de um sistema de duas equações.

```
%Formula Resolvente
clc; clear all;
syms x a b c;
solucao=solve('a*x^2+b*x+c=0'),
validar=a*(x-solucao(1))*(x-solucao(2)), %expand(validar)
```

```
%Formula Resolvente
%a*x^2+b*x+c=0
%x1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%x2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%a*x^2+b*x+c=a*(x-x1)*(x-x2),
```

```

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

```

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
syms s;
expand((s+10)*(s+100)); %s^2+110*s+1000

wn=sqrt(1000); %wn^2=1000;
fa=110/(2*wn), %2*fa*wn=110
num=[0 0 1000]; %1000
den=[1 110 1000]; %s^2+100*s+1000
H=tf(num,den);
step(H,1); grid on;
```

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
wn=sqrt(4000); %wn^2=4000;
fa=120/(2*wn), %2*fa*wn=120

num_1=[0 0 4000]; %4000
den_1=[1 120 4000]; %s^2+120*s+4000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ªordem

num_2=[0 0 4000]; %4000
den_2=[0 120 4000]; %s^2+100*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ªordem

step(H_1,H_2,0.3); grid on;
legend('2ªordem','1ªordem');
```