

Dividir (17) por  $\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)$  para simplificação e obter (18).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 \left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right) + s k_{Dm} \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{2k_e}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}} \Leftrightarrow \quad (A)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)} \frac{2k_e}{s^2 + s \frac{k_{Dm} \dot{i}_R \dot{i}_{CC}}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)} + \frac{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}{\left( J_m \dot{i}_R \dot{i}_{CC} + \frac{M}{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}} \right)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R \dot{i}_R \eta_{CC} \dot{i}_{CC}}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_e}{J_m \dot{i}_R^2 \dot{i}_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}} \quad (18)$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento com controlo da posição linear  $x$ : de acordo com a Figura D.

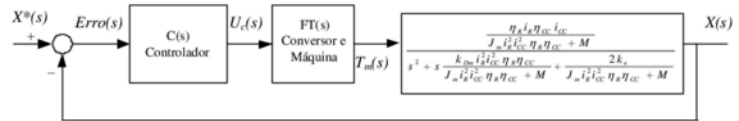


Figura D

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global exigida.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $\frac{X(s)}{T_m(s)}$  representa a FT obtida na equação (18).

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), realizando as simplificações necessárias, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Considere para a FT apresentada

na **alínea b)**,  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ ,  $K=10$  e  $\tau_e=1ms$ . Considere que a FT obtida na **alínea a)**, tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ .

A correspondência entre a função de transferência do enunciado do problema e a obtida em (18) com o sistema carro-cremalheira, carro de massa  $M$  e as suas molas é obtida com (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}}{s^2 + s \frac{k_{Dm} i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC}}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M} + \frac{2k_e}{J_m i_R^2 i_{CC}^2 \eta_R \eta_{CC} + M}} \Rightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \quad (19)$$

Desenvolvendo (19) de forma a ficar acessível ao cancelamento dos pólos com o zero da FT do compensador PI (20).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) 100 \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{1000 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{5}{100 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \quad (20)$$

A Função de Transferência do compensador PI é obtida com (21). É caracterizada por um ganho  $k_c$  e uma constante de tempo  $\tau_e$ .

$$C(s) = \frac{k_c(1 + s\tau_e)}{s} \quad (21)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema tem quatro pólos (Figura E): i) o pólo na origem do PI (22), ii) o pólo igual a  $-10$  (23), iii) o pólo igual a  $-100$  (24), iv) o pólo associado à constante de tempo do atraso estatístico  $\tau_e$  (25).

$$s = 0 \quad (22)$$

$$s = -10s^{-1} \quad (23)$$

$$s = -100s^{-1} \quad (24)$$

$$1 + s\tau_e = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\tau_e} \xrightarrow{\tau_e=1ms} s = -1000s^{-1} \quad (25)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, uma solução é: i) desprezar a dinâmica da constante de tempo  $\tau_e$  do atraso estatístico do conversor, ii) com o zero do PI cancelar o pólo dominante (o mais próximo da origem)  $s=-10$ .

**5.2.3 Simplificação de funções de transferência:** “Quando existem pólos no sistema muito afastados dos pólos dominantes (*afastamento da ordem de 10 vezes a localização dos pólos dominantes*), para a resposta do sistema, podem ser desprezados aqueles pólos localizados no interior do SCE (devendo ser mantido o ganho estático do referido sistema)”.

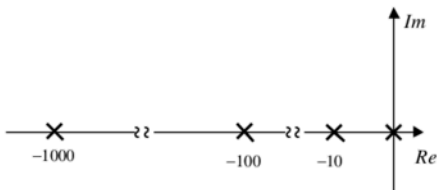


Figura E

Utilizar o zero do compensador PI (21) para anular o pólo dominante em (20) e obter  $\tau_c$  (26).

$$\tau_c = \frac{1}{10} \text{ s}^{-1} \quad (26)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema é obtida com (27).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times k_e \times \frac{5}{\left(1 + \frac{1}{100}s\right)} = \frac{5k_c k_e}{s \left(\frac{100+s}{100}\right)} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s)} \quad (27)$$

A função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (28).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{s(100+s)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{s(100+s)}} = \frac{5k_c k_e}{s(100+s) + 5k_c k_e} \times \frac{s(100+s)}{s(100+s)} = \quad (28)$$

$$\frac{5k_c k_e}{s(100+s) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e} \Rightarrow FT_{CF} = \frac{5k_c k_e}{s^2 + 100s + 5k_c k_e}$$

Para dimensionar  $k_c$  (30) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

(29) com um factor de amortecimento de  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\xi=\sqrt{2}/2} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2} \quad (29)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_o = 100 \\ \omega_o^2 = 5k_c k_e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_o = \frac{100}{2\xi} \\ \left(\frac{100}{2\xi}\right)^2 = 5k_c k_e \Leftrightarrow k_c = \frac{\left(\frac{100}{2\xi}\right)^2}{5k_e} \xrightarrow[k_e=5]{\xi=\sqrt{2}/2} k_c = \frac{\left(\frac{100}{2 \times \sqrt{2}/2}\right)^2}{5 \times 10} = 100 \end{cases} \quad (30)$$

Generalizar com o código de um sistema de duas equações.

```
%Formula Resolvente
clc; clear all;
syms x a b c;
solucao=solve('a*x^2+b*x+c=0'),
validar=a*(x-solucao(1))*(x-solucao(2)), %expand(validar)
```

```
%Formula Resolvente
%a*x^2+b*x+c=0
%x1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%x2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a),
%a*x^2+b*x+c=a*(x-x1)*(x-x2),
```

```

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
syms s;
expand((s+10)*(s+100)); %s^2+110*s+1000

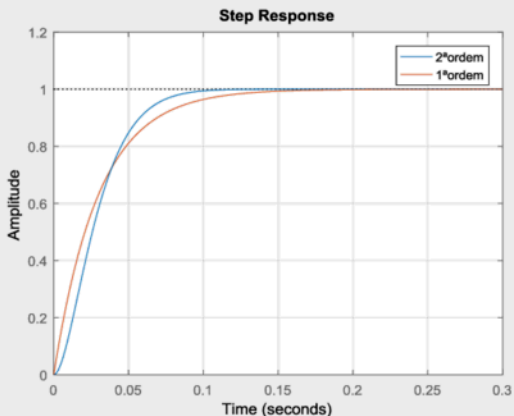
wn=sqrt(1000); %wn^2=1000;
fa=110/(2*wn), %2*fa*wn=110
num=[0 0 1000]; %1000
den=[1 110 1000]; %s^2+100*s+1000
H=tf(num,den);
step(H,1); grid on;
```

```
%Calcular factor de amortecimento
clc; clear all;
wn=sqrt(4000); %wn^2=4000;
fa=120/(2*wn), %2*fa*wn=120

num_1=[0 0 4000]; %4000
den_1=[1 120 4000]; %s^2+120*s+4000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ª ordem

num_2=[0 0 4000]; %4000
den_2=[0 120 4000]; %s^2+100*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ª ordem

step(H_1,H_2,0.3); grid on;
legend('2ª ordem', '1ª ordem');
```



%Calcular factor de amortecimento

clc; clear all;

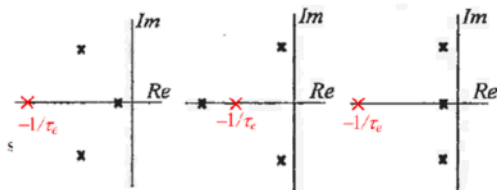
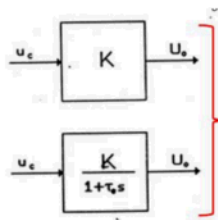
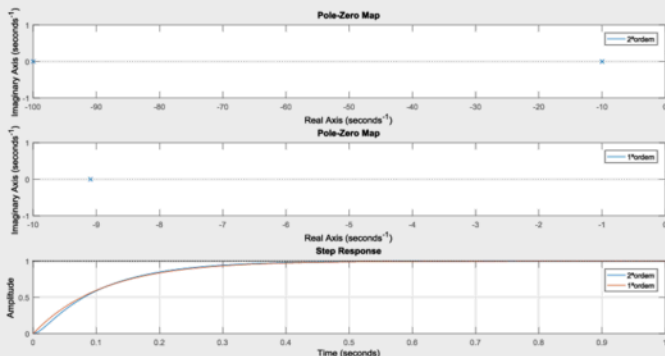
wn=sqrt(4000); %wn^2=4000;

fa=120/(2\*wn), %2\*fa\*wn=120

```
num_1=[0 0 1000]; %1000
den_1=[1 110 1000]; %s^2+110*s+1000
H_1=tf(num_1,den_1); %2ªordem
```

```
num_2=[0 0 1000]; %1000
den_2=[0 110 1000]; %s^2+110*s+1000
H_2=tf(num_2,den_2); %1ªordem
```

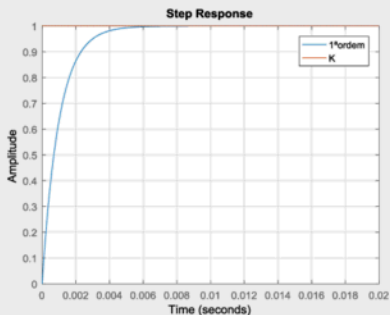
```
subplot(3,1,1); pzmap(H_1); legend('2ªordem');
subplot(3,1,2); pzmap(H_2); legend('1ªordem');
subplot(3,1,3); step(H_1,H_2,1.0); grid on;
legend('2ªordem','1ªordem');
```



```
%Modelo para efeitos de controlo
clc; clear all;
K=1;           %Ganho do conversor;
tao=1e-3;     %Constante de tempo tao=1ms
```

```
num_1=[0 K];
den_1=[tao 1];
H_1=tf(num_1,den_1); %1ª ordem
```

```
num_2=[0 K];
den_2=[0 1];
H_2=tf(num_2,den_2); %desprezar tao
step(H_1,H_2,0.02); grid on; legend('1ª ordem','K');
```



Fazer uma simulação numérica:

- i)  $U=U_o=U_{oav}$ ;
- ii) Com a FT;
- iii) Relacionar com a constante de tempo  $\tau$ ;
- iv) Com o modelo em Simulink (SimPowerSystems).

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30

## Problema 1

Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema fuso-porca. Acoplado na extremidade da porca existe um carro de massa  $M$ . Ligado ao carro existem três molas iguais com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ . Desprezar a massa da porca, da roldana e das duas molas. O motor eléctrico tem o momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema fuso-porca tem uma relação de transmissão  $i_{FP}$  e um rendimento  $\eta_{FP}$ .

a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m = f(x)$ .

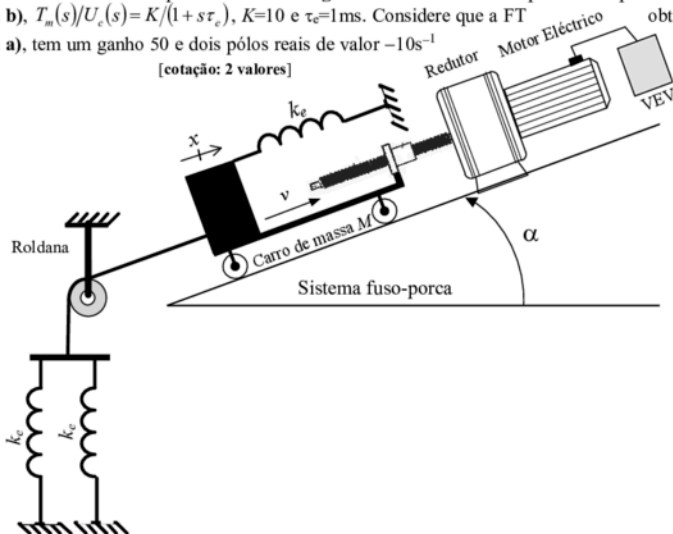
[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_c)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_c$  a constante de tempo de atraso. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para **controlo da posição linear  $x$** .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea b), **realizando as simplificações necessárias**, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem**. Considere para a FT apresentada na alínea b),  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_c)$ ,  $K=10$  e  $\tau_c=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a), tem um ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10\text{s}^{-1}$  e  $-100\text{s}^{-1}$ .

[cotação: 2 valores]





**QUADRO 5.2**

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
 SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

a) Para o sentido do movimento do sistema fuso-porca indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m=f(x)$ .

Esquema de princípio de acordo com o enunciado do problema representado pela Figura A.1. Cada bloco representa um elemento do accionamento e com identificação dos seus parâmetros.

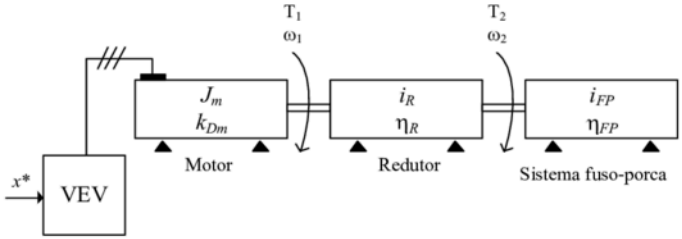


Figura A.1 – Esquema de blocos representativo do problema (accionamento electromecânico).

Equação mecânica do sistema (Figura A.1) obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm}\omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

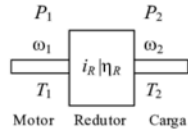


Figura A – Elemento redutor com identificação dos seus parâmetros.

Com base na Figura A, a relação entre binários de entrada ( $T_1$ ) e saída ( $T_2$ ) do redutor é obtida com (2), admitindo a existência de perdas mecânicas com um rendimento  $\eta$ .

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) são obtidas as duas relações (3) e (4) com a relação de transmissão  $i_R$ .

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \Leftrightarrow T_2 = i_R \eta_R T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

O sistema fuso-porca permite a conversão de um movimento rotativo em linear. Relação entre binário e força do sistema fuso-porca (Figura B) (5).

$$\eta_{FP} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{FP} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{FP} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$