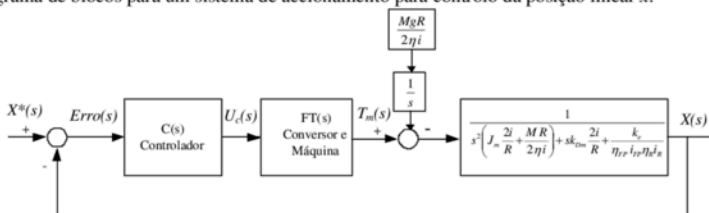


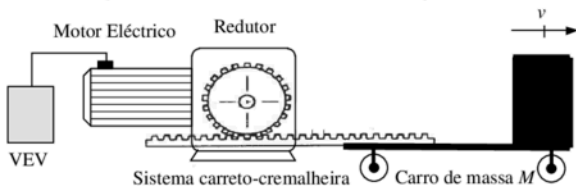
Diagrama de blocos para um sistema de accionamento para controlo da posição linear  $x$ :



- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $X(s)/T_m(s)$  representa a FT calculada na equação (16).



I. Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carroto-cremalheira. Acoplado na extremidade da cremalheira existe um carro de massa  $M$  que se desloca no plano horizontal, conforme o esquema da figura. O motor eléctrico tem momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema carroto-cremalheira tem uma relação de transmissão  $i_{CC}$  e um rendimento  $\eta_{CC}$ .



a) Obtenha a equação da dinâmica do motor eléctrico,  $T_m$ , referida à coordenada da velocidade linear  $v$ , ou seja,  $T_m = f(v)$ . [cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da velocidade linear  $v$ . [cotação: 2 valores]

c) Dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para **sistemas de segunda ordem** para realizar o controlo da velocidade linear  $v$ . [cotação: 2 valores]

# QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

## Resolução:

I.

a)

Equação mecânica do sistema (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm}\omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor.

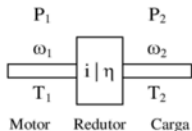


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2) (Figura A).

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) obtém-se duas relações (3) e (4).

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

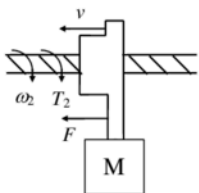


Figura B

Relação entre binário e força do sistema carroto-cremalheira (5) (Figura B).

$$\eta_{cc} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{cc} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{cc} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{cc} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{cc} = \frac{F}{\eta_{cc} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

Da equação (5) obtém-se duas relações (6) e (7).

$$i_{cc} = \frac{F}{\eta_{cc} T_2} \rightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{cc} i_{cc}} \quad (6)$$

$$i_{cc} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

Calcula a força  $F$  desprezando a massa do sistema carroto-cremalheira e considerar a massa  $M$  do carro). O carro de massa  $M$  está sujeito à segunda lei de Newton, ou seja (8).

$$F = Ma \Leftrightarrow F = M \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

Para resolver em função da velocidade linear  $v$ , substituir (8) em (6) para obter (9).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M \frac{dv}{dt}}{\eta_{CC} i_{CC}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

Substituir (9) em (2) para obter (10).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{\frac{M}{\eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt}}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

Substituir (10) em (1) para obter (11).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt} \quad (11)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_1$ , substituir de (7) e resolver em ordem a  $\omega_1$  para obter (12).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow[i_{CC} = \frac{\omega_2}{v}]{\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_R}} \omega_1 = i_R i_{CC} v \quad (12)$$

Derivar em ordem ao tempo (12) para obter (13).

$$\omega_1 = i_R i_{CC} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

Substituir (13) e (12) em (11) para obter (14).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{CC} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow T_m = \left( J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v \quad (14)$$

**b)**

Passar para o domínio da frequência a equação (14) para obter (15).

$$T_m = \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{CC} v \xrightarrow{TL}$$

$$T_m(s) = s \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) V(s) + k_{Dm} i_R i_{CC} V(s) \Leftrightarrow$$

$$T_m(s) = \left[ s \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC} \right] V(s) \Leftrightarrow \quad (15)$$

$$\frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right) + k_{Dm} i_R i_{CC}} \Leftrightarrow \frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{k_{Dm} i_R i_{CC} + s \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)}$$

Simplificar (15) dividindo por  $k_{Dm}i_Ri_{CC}$  para obter (16).

$$\frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{k_{Dm}i_Ri_{CC} + s \left( J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}} \right)} \Leftrightarrow \frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{k_{Dm}i_Ri_{CC}}}{1 + s \frac{J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}}{k_{Dm}i_Ri_{CC}}} \quad (16)$$

A equação (16) pode ser simplificada para obter (19) considerando o ganho  $k_m$  (17) e a constante de tempo mecânica  $\tau_m$  (18).

$$k_m = \frac{1}{k_{Dm}i_Ri_{CC}} \quad (17)$$

$$\tau_m = \frac{J_m i_R i_{CC} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{CC} i_{CC}}}{k_{Dm}i_Ri_{CC}} \quad (18)$$

$$\frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{k_{Dm}i_Ri_{FP}}}{1 + s \frac{J_m i_R i_{FP} + \frac{M}{\eta_R i_R \eta_{FP} i_{FP}}}{k_{Dm}i_Ri_{FP}}} \Leftrightarrow \frac{V(s)}{T_m(s)} = \frac{k_m}{1 + s \tau_m} \quad (19)$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento para controlo da velocidade linear  $v$ . As duas figuras são equivalentes.

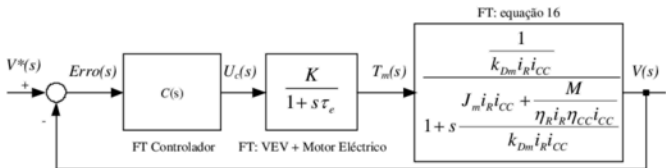


Figura C

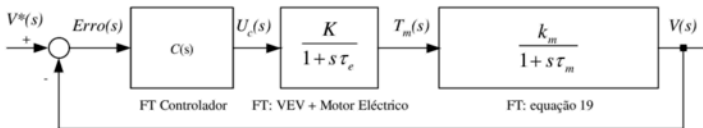
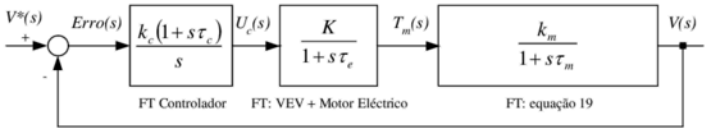


Figura D

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $V(s)/T_m(s)$  representa a FT calculada na equação (16) e (19).



Função de Transferência do compensador PI (20).

$$C(s) = \frac{k_c(1+s\tau_c)}{s} \quad (20)$$

O compensador do tipo PI permite obter um erro estático nulo para uma entrada em escalão. Cancelar o zero do controlador com o pólo dominante do sistema (21).

$$1+s\tau_c = 1+s\tau_m \Leftrightarrow \tau_c = \tau_m \quad (21)$$

Determinação da FT da malha de controlo de velocidade  $V(s)/V^*(s)$  (22).

$$\frac{V(s)}{V^*(s)} = \frac{\frac{k_c}{s} \frac{K}{(1+s\tau_e)} k_m}{1 + \frac{k_c}{s} \frac{K}{(1+s\tau_e)} k_m} = \frac{\frac{k_c K k_m}{s(1+s\tau_e)}}{1 + \frac{k_c K k_m}{s(1+s\tau_e)}} = \frac{k_c K k_m}{s(1+s\tau_e) + k_c K k_m} = \frac{\frac{k_c K k_m}{\tau_e}}{s^2 + \frac{1}{\tau_e} s + \frac{k_c K k_m}{\tau_e}} \quad (22)$$

Para dimensionar  $k_c$  (22) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214] com um factor de amortecimento de  $\xi = \sqrt{2}/2$ .

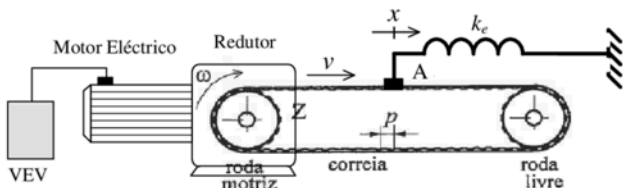
$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau_e} \\ \omega_n^2 = \frac{k_c K k_m}{\tau_e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \frac{1}{2\xi\tau_e} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_e} \\ \frac{1}{2\tau_e^2} = \frac{k_c K k_m}{\tau_e} \Leftrightarrow k_c = \frac{1}{2Kk_m\tau_e} \end{array} \right. \quad (24)$$



1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24

I. Um motor eléctrico accionado a um redutor acciona um sistema carreto e correia dentada. No ponto A da correia dentada existe uma mola com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ . O motor eléctrico tem momento de inércia  $J_m$  e coeficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$ . O redutor tem uma relação de transmissão  $i_R$  e um rendimento  $\eta_R$ . O sistema carreto e correia dentada tem uma relação de transmissão  $i_{CC}$  e um rendimento  $\eta_{CC}$ .



a) Para o sentido do movimento do sistema carreto e correia dentada indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor,  $T_m$ , referida à coordenada da posição linear  $x$ , ou seja,  $T_m = f(x)$ . [cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário ( $T_m$ ) proporcional a um sinal de comando  $u_c$ , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT:  $T_m(s)/U_c(s) = K/(1+s\tau_e)$ , em que  $K$  representa o ganho e  $\tau_e$  a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da posição linear  $x$ . [cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea anterior, dimensione os parâmetros de um **compensador PID**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Admita que  $K=10$  e  $\tau_e=1\text{ms}$ . Considere que a FT obtida na alínea a),  $X(s)/T_m(s)$ , tem ganho 50 e dois pólos reais de valor  $-10$  e  $-100$ . [cotação: 2 valores]