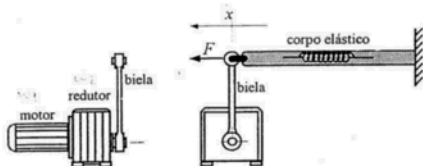


## Problema 1

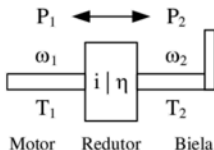
Um motor acoplado a um redutor acciona uma biela (braço) para tensionar um corpo elástico, conforme o esquema da figura. O rotor do motor tem um momento de inércia de  $0,01\text{kgm}^2$  e coeficiente de atrito viscoso igual a  $0,0001\text{Nms}$ . O redutor tem relação de transmissão igual a 100 e a biela (braço) tem 50cm de comprimento e massa desprezável. O corpo elástico tensionado tem o coeficiente de elasticidade de  $1200\text{N/mm}$ .

- Calcular o valor do binário motor necessário para tensionar o corpo com uma força de  $4000\text{N}$ .
- Considerar pequenos deslocamentos lineares ( $x$ ). Obter a equação da dinâmica referida à coordenada de posição angular da biela (braço), ou seja,  $T_{\text{motor}} = f(\theta)$ .
- Apresentar o diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da coordenada de posição angular  $\theta$  da biela (braço).



## P1 Resolução:

- Calcular o valor do binário necessário para tensionar o corpo com uma força de  $4000\text{N}$ .



Binário motor com a contribuição do binário de inércia  $T_{Jm}$ , binário viscoso  $T_{kDm}$  e binário resistente  $T_1$  (1).

$$T_{\text{motor}} = T_{Jm} + T_{kDm} + T_1 \quad (1)$$

Considerando o regime estacionário,  $\omega = \omega_1 = 0$  e  $F = 4000\text{N}$ , obtém-se duas relações (2).

$$\omega = \omega_1 = 0 \Rightarrow T_{Jm} = \frac{d\omega_1}{dt} \Leftrightarrow T_{Jm} = 0 \quad (2)$$

$$\omega = \omega_1 = 0 \Rightarrow T_{kDm} = k_{Dm} \omega_1 \Leftrightarrow T_{kDm} = 0$$

O binário motor  $T_{\text{motor}}$  (1), em regime permanente, corresponde ao binário resistente  $T_1$  (3).

$$T_{\text{motor}} = T_{Jm} + T_{kDm} + T_1 \xrightarrow[T_{Jm} = \frac{d\omega_1}{dt} \Leftrightarrow T_{Jm} = 0]{T_{kDm} = k_{Dm} \omega_1 \Leftrightarrow T_{kDm} = 0} T_{\text{motor}} = T_1 \quad (3)$$

$$T_{\text{motor}} = T_{\text{bm}} + T_{\text{ldm}} + T_{\text{t}} \quad (11)$$

Contribuição do binário de inércia  $T_{Jm}$  com as equações (8) e (9) para obter (12).

$$T_{Jm} = J_m \frac{d\omega_m}{dt} \Leftrightarrow T_{Jm} = J_m \frac{d\omega_1}{dt} \Leftrightarrow T_{Jm} = J_m i \frac{d\omega_2}{dt} \Leftrightarrow T_{Jm} = J_m i \frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow T_{Jm} = J_m i \ddot{\theta} \quad (12)$$

Contribuição do binário de atrito viscoso  $T_{kDm}$  com as equações (8) e (9) para obter (13).

$$T_{kDm} = k_D \omega_1 \Leftrightarrow T_{kDm} = k_D i \omega_2 \Leftrightarrow T_{kDm} = k_D i \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow T_{kDm} = k_D i \dot{\theta} \quad (13)$$

Considerando pequenos deslocamentos lineares  $x$  e com a aproximação trigonométrica de  $\text{tg}(\theta)$  (14) validada com o código em *Matlab*.

$$\text{tg}(\theta) = \frac{x}{R} \Leftrightarrow x = R \text{tg}(\theta) \xrightarrow{\text{tg}(\theta) \approx \theta} x \approx R\theta \quad (14)$$

```
clc; clear all;
teta=0:0.1:pi/10, %variação do angulo teta ate pi/10=18 graus
tan(teta),
```

|             |   |        |        |        |
|-------------|---|--------|--------|--------|
| teta =      | 0 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 |
| tan(teta) = | 0 | 0.1003 | 0.2027 | 0.3093 |

A força  $F$  (15) é calculada com o coeficiente de elasticidade  $k_e$ , da posição linear  $x$ , e com a substituição da equação (14).

$$F = k_e x \xrightarrow{x \approx R\theta} F \approx k_e R\theta \quad (15)$$

O binário resistente  $T_1$  (16) é obtido com a força  $F$  e a posição angular  $\theta$ .

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{FR}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{(k_e R\theta)R}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{k_e R^2}{\eta i} \theta \quad (16)$$

Substituindo (12) – (16) em (11) para obter (17).

$$T_{motor} = J_m i \frac{d^2\theta}{dt^2} + k_D i \frac{d\theta}{dt} + \frac{k_e R^2}{\eta i} \theta \Leftrightarrow T_{motor} = J_m i \ddot{\theta} + k_D i \dot{\theta} + \frac{k_e R^2}{\eta i} \theta \quad (17)$$

**c) Apresentar o diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da coordenada de posição angular  $\theta$  da biela (braço).**

Aplicar a Transformada de Laplace a (17) para obter a função de transferência  $\theta(s)/T_m(s)$  (18).

$$T_{motor} = J_m i \frac{d^2\theta}{dt^2} + k_D i \frac{d\theta}{dt} + \frac{k_e R^2}{\eta i} \theta \xrightarrow{\text{TL}} T_{motor}(s) = s^2 J_m i \theta(s) + s k_D i \theta(s) + \frac{k_e R^2}{\eta i} \theta(s) \Leftrightarrow$$

$$T_{motor}(s) = \left( s^2 J_m i + s k_D i + \frac{k_e R^2}{\eta i} \right) \theta(s) \xrightarrow{\div J_m i} \frac{\theta(s)}{T_{motor}(s)} = \frac{1/(J_m i)}{s^2 + \frac{k_D}{J_m} s + \frac{k_e R^2}{\eta J_m i^2}} \quad (18)$$

A função de transferência  $\theta(s)/T_m(s)$  (18) tem a dinâmica do sistema movido (carga).



1. O subsistema com a dinâmica resultante da equação (18);
2. O subsistema “*FT\_Conversor\_Maquina*” tem a dinâmica resultante do conjunto formado pelo conversor estático de potência e máquina eléctrica. A máquina eléctrica pode por exemplo ser do tipo DC ou AC, com o adequado tipo de conversor, respectivamente em modo de funcionamento DC-DC e DC-AC;
3. O subsistema “*Controlador\_C(s)*” tem a FT adequada à cadeia de controlo da posição angular e objectivos pretendidos. Habitualmente são utilizadas FT (sistemas univariáveis) do tipo P, PI, PD e PID.

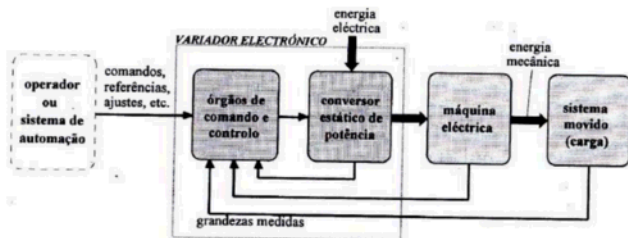


Fig. 1.1 – Esquema funcional de um accionamento eléctrico.

Propriedades da Transformada de *Laplace* (TL):

$$x(t) \xrightarrow{TL} X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TL} sX(s)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TL} s^n X(s)$$

**Problema 2**

Considere o sistema da figura com os seguintes parâmetros:

Motor eléctrico

Momento de inércia  $J_m$

Coefficiente de atrito viscoso  $k_{Dm}$

Redutor

Relação de transmissão  $i$

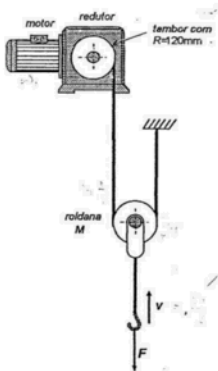
Rendimento  $\eta$

Tambor

Raio de enrolamento suposto constante  $R$

Roldana

Massa  $M$



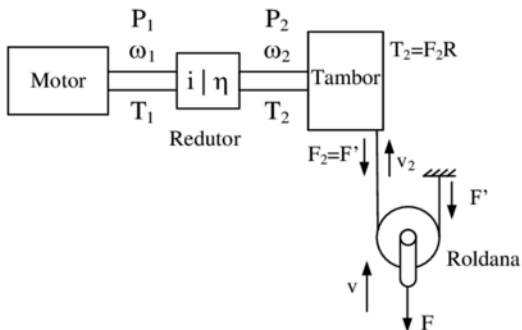
a) Obter o modelo dinâmico do sistema representado na figura, onde o binário motor  $T_{motor}$  e a força  $F$  são as entradas do sistema e a velocidade ascensional  $v$  como saída.

b) Representar o modelo do sistema na forma de um diagrama de blocos, onde o binário motor  $T_{motor}$  e a força  $F$  são entradas e a velocidade ascensional  $v$  a saída.

c) Apresentar uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da velocidade ascensional  $v$ .

**Resolução:**

a) Obter o modelo dinâmico do sistema representado na figura, onde o binário motor  $T_{motor}$  e a força  $F$  são as entradas do sistema.



**Roldana:**

$v$  – velocidade ascensional da roldana

$v_2$  – velocidade linear do cabo ou do tambor

A soma da força de inércia ( $Ma$ ) e o peso ( $Mg$ ) aplicado na roldana é obtido com (1).

$$F_{\text{Roldana}} = Ma + Mg \Leftrightarrow F_{\text{Roldana}} = M \frac{dv}{dt} + Mg \quad (1)$$

A roldana está suspensa por um cabo onde ambas as pontas partilham a força de suspensão (2).

$$F' + F' = F + F_{\text{Roldana}} \Leftrightarrow 2F' = F + F_{\text{Roldana}} \Leftrightarrow F' = \frac{F + F_{\text{Roldana}}}{2} \xrightarrow{F'=F_2} F_2 = \frac{F + F_{\text{Roldana}}}{2} \quad (2)$$

Relacionar a velocidade ascensional da roldana ( $v$ ) com a velocidade linear do cabo ou do tambor ( $v_2$ ) com opção de duas soluções: **Solução 1** e **Solução 2**.

**Solução 1:**

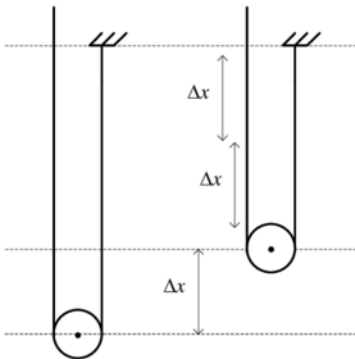
$$(F + F_{\text{Roldana}})v = F_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{(F + F_{\text{Roldana}})}{F_2} v \xrightarrow{F_2 = \frac{F + F_{\text{Roldana}}}{2}} v_2 = \frac{(F + F_{\text{Roldana}})}{\frac{F + F_{\text{Roldana}}}{2}} v \Leftrightarrow v_2 = 2v \quad (3)$$

**Solução 2:**

De acordo com a análise da figura seguinte, para um deslocamento  $\Delta x$  da roldana implica um deslocamento  $2 \times \Delta x$  de qualquer ponto do cabo. A relação entre o deslocamento  $\Delta x$  da roldana e as velocidades lineares  $v$  e  $v_2$  é a seguinte:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = v$$

$$\frac{d(\Delta x + \Delta x)}{dt} = v_2 \Leftrightarrow 2 \frac{d\Delta x}{dt} = v_2 \xrightarrow{\frac{d\Delta x}{dt} = v} 2v = v_2 \Leftrightarrow v_2 = 2v$$



**Conclusão:** A velocidade linear  $v_2$  é o dobro de  $v$  ( $v_2 = 2v$ ).

**Tambor:**

$$v_2 = \omega_2 R \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{R} \xrightarrow{v_2=2v} \omega_2 = \frac{2v}{R} \quad (4)$$

$$T_2 = F_2 R \Leftrightarrow T_2 = \left( \frac{F + F_{\text{rodada}}}{2} \right) R \xrightarrow{F_{\text{rodada}} = M \frac{dv}{dt} + Mg} T_2 = \left( \frac{F + M \frac{dv}{dt} + Mg}{2} \right) R \quad (5)$$

**Redutor:**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_1 = \frac{P_2}{\eta} \Leftrightarrow T_1 \omega_1 = \frac{T_2 \omega_2}{\eta} \Leftrightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{\eta T_1} \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (6)$$

$$\omega_m = \omega_1 \Leftrightarrow \omega_m = i \omega_2 \Leftrightarrow \omega_m = \frac{2i}{R} v \quad (7)$$

O binário motor  $T_{\text{motor}}$  é obtido com (8). A substituição de (7) permite obter (9) e (10).

$$T_{\text{motor}} = T_{J_m} + T_{k_{Dm}} + T_1 \quad (8)$$

$$T_{J_m} = J_m \frac{d\omega_m}{dt} \Leftrightarrow T_{J_m} = J_m \frac{i}{R} \frac{dv_2}{dt} \Leftrightarrow T_{J_m} = J_m \frac{2i}{R} \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

$$T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \omega_m \Leftrightarrow T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \frac{2i}{R} v \quad (10)$$

Substituir (5) em (6) para obter (11).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{F_2 R}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{\left( \frac{F + M \frac{dv}{dt} + Mg}{2} \right) R}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MR}{2\eta i} \frac{dv}{dt} + \frac{MgR}{2\eta i} \quad (11)$$

Substituindo (9), (10) e (11) em (8) para obter (12).

$$T_{\text{motor}} = T_{J_m} + T_{k_{Dm}} + T_1 \Leftrightarrow T_{\text{motor}} = \left( J_m \frac{2i}{R} \frac{dv}{dt} \right) + \left( k_{Dm} \frac{2i}{R} v \right) + \left( \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MR}{2\eta i} \frac{dv}{dt} + \frac{MgR}{2\eta i} \right) \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$T_{\text{motor}} = \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} \frac{2i}{R} v + \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MgR}{2\eta i}$$

Considerar que o peso  $Mg$  é muito inferior que a força  $F$ , ou seja,  $Mg \ll F$ . Com esta simplificação  $Mg \ll F$  em (12) permite obter (13).

$$T_{\text{motor}} = \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} \frac{2i}{R} v + \frac{R}{2\eta i} F \quad (13)$$

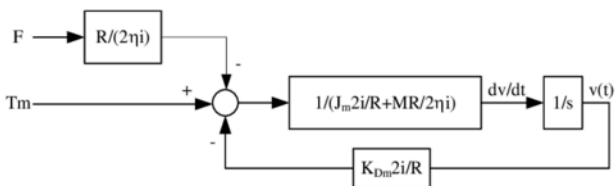
b) Representar o modelo do sistema na forma de um diagrama de blocos, onde o binário motor  $T_{motor}$  e a força  $F$  são entradas e a velocidade ascensional  $v$  a saída.

### Solução 1:

A partir da equação do binário motor (13), escrever em ordem a  $dv/dt$  para obter (14).

$$T_{motor} = \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} \frac{2i}{R} v + \frac{R}{2\eta i} F \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{T_{motor} - \frac{R}{2\eta i} F - k_{Dm} \frac{2i}{R} v}{J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i}} \quad (14)$$

Diagrama de blocos:



### Solução 2:

Aplicar a Transformada de Laplace em (13) para obter a FT  $\frac{V(s)}{T_{motor}(s) - \frac{R}{2\eta i} F(s)}$  com (15).

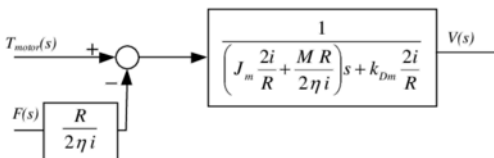
$$T_{motor} = \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{dv}{dt} + k_{Dm} \frac{2i}{R} v + \frac{R}{2\eta i} F \xrightarrow{TL}$$

$$T_{motor}(s) = \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) s V(s) + k_{Dm} \frac{2i}{R} V(s) + \frac{R}{2\eta i} F(s) \Leftrightarrow$$

$$T_{motor}(s) - \frac{R}{2\eta i} F(s) = \left[ \left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) s + k_{Dm} \frac{2i}{R} \right] V(s) \Leftrightarrow$$

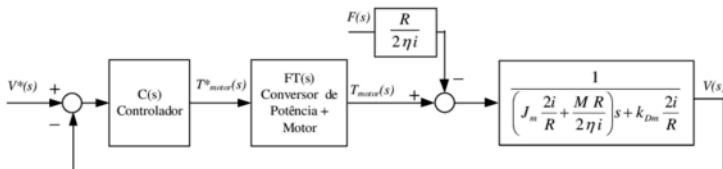
$$\frac{V(s)}{T_{motor}(s) - \frac{R}{2\eta i} F(s)} = \frac{1}{\left( J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) s + k_{Dm} \frac{2i}{R}}$$

(15)





c) Apresentar uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da velocidade ascensional  $v$ .



1. O subsistema com a dinâmica resultante da equação (15);
2. O subsistema “*FT\_ConversorPotencia\_Motor*” tem a dinâmica resultante do conjunto formado pelo conversor estático de potência e máquina eléctrica. A máquina eléctrica pode por exemplo ser do tipo DC ou AC, com o adequado tipo de conversor, respectivamente em modo de funcionamento DC-DC e DC-AC;
3. O subsistema “*Controlador\_C(s)*” tem a FT adequada à cadeia de controlo da velocidade  $v$ . Habitualmente são utilizadas FT do tipo P, PI, PD e PID. A melhor opção neste caso seria a utilização de um PI ou PID porque: i) ambos têm um pólo na origem o que permite obter um erro estático de posição em regime permanente nulo para uma entrada em escalão da referência  $V^*(s)$ ; ii) a perturbação que depende da força  $F$ , situa-se à direita do bloco com a FT do “*Controlador\_C(s)*”.

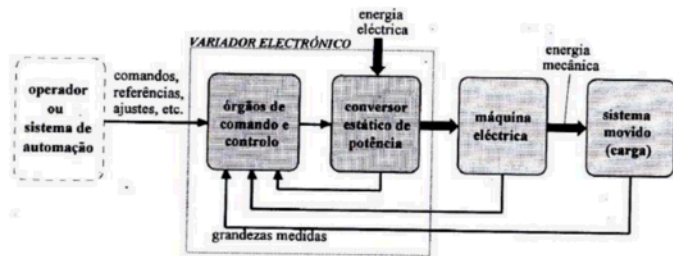


Fig. 1.1 – Esquema funcional de um accionamento eléctrico.

**Problema 3**

Um motor de corrente contínua de excitação independente encontra-se a trabalhar a fluxo constante com  $U_N=220V$ . Os parâmetros do motor são:  $T_N=20Nm$ ;  $\eta=0,85$ ;  $J=0,1kgm^2$  e  $N_N=1500rpm$ . Considerar que para a velocidade nominal as perdas mecânicas são aproximadamente iguais às perdas por efeito de Joule.

- Calcular a corrente nominal e a resistência do induzido.
- Considerar que as perdas mecânicas variam directamente com a velocidade, calcular a tensão aplicada ao motor se a velocidade for 750rpm, com o binário nominal aplicado.
- Estando o motor excitado e parado, foi aplicado no induzido uma corrente de  $2I_N=I_a$  até o motor atingir a velocidade de 1500rpm. Calcular o intervalo de tempo que esteve aquela corrente aplicada ao motor (desprezar as perdas mecânicas).

**a) Calcular a corrente nominal e a resistência do induzido.**

Relacionar a conversão de unidades para a velocidade angular de rotação (1).

$$N[rpm] = \frac{60}{2\pi} \omega[rad/s] \Rightarrow \omega[rad/s] = \frac{2\pi}{60} N[rpm] \quad (1)$$

O binário nominal ( $T_N$ ) resulta da aplicação da potência útil ( $P_u$ ) ou nominal ( $P_N$ ) (2).

$$P_u = P_N \Rightarrow P_u = T_N \omega_N \Leftrightarrow P_u = 20 \times \frac{2\pi}{60} \times 1500 \Leftrightarrow P_u = 3141W \quad (2)$$

O rendimento (3) é obtido pela relação entre a potência útil ( $P_u$ ) e a potência absorvida ( $P_{abs}$ ).

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} \Leftrightarrow P_{abs} = \frac{P_u}{\eta} \Leftrightarrow P_{abs} = \frac{3141}{0,85} \Leftrightarrow P_{abs} = 3696W \quad (3)$$

A potência absorvida ( $P_{abs}$ ) calculada em (3) permite calcular a corrente absorvida pelo motor.

$$P_{abs} = U_N I_{abs} \Leftrightarrow I_{abs} = \frac{P_{abs}}{U_N} \Leftrightarrow I_{abs} = \frac{3696}{220} \Leftrightarrow I_{abs} = 16,8A \quad (4)$$

A potência de perdas totais ( $P_{PT}$ ) é calculada em (5).

$$P_{PT} = P_{abs} - P_u \Leftrightarrow P_{PT} = 3696 - 3141 \Leftrightarrow P_{PT} = 555W \quad (5)$$

Como as perdas totais são a dividir pelas perdas mecânicas ( $P_{mec}$ ) (6) e de Joule ( $P_{Joule}$ ) (6.1), permite calcular a resistência do induzido em (7).

$$P_{mec} = \frac{P_{PT}}{2} \Leftrightarrow P_{mec} = \frac{555}{2} \Leftrightarrow P_{mec} = 277,5W \quad (6)$$

$$P_{Joule} = \frac{P_{PT}}{2} \Leftrightarrow P_{Joule} = \frac{555}{2} \Leftrightarrow P_{Joule} = 277,5W \quad (6.1)$$

$$P_{Joule} = \frac{P_{PT}}{2} \Leftrightarrow R_a I_a^2 = \frac{P_{PT}}{2} \Leftrightarrow R_a = \frac{P_{PT}}{I_a^2} \Leftrightarrow R_a = \frac{555}{(16,8)^2} \Leftrightarrow R_a = 0,98\Omega \approx 1\Omega \quad (7)$$