

I.

a)

Equação mecânica do sistema obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1) T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

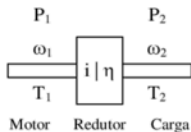


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2).

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) obtém-se as duas relações (3) e (4).

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

A relação de transmissão do sistema carreto e correia dentada é obtido por (5). Esta relação é obtida relacionando o ângulo descrito numa rotação de 2π .

$$\frac{2\pi}{Zp} = \frac{\theta}{x} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{Zp} = \frac{\omega t}{vt} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{Zp} = \frac{\omega}{v} \rightarrow i_{cc} = \frac{2\pi}{Zp} = \frac{\omega}{v} \quad (5)$$

Relação entre binário e força do sistema carreto e correia dentada (Figura B) (6).

$$\eta_{cc} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{cc} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{cc} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{cc} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{cc} = \frac{F}{\eta_{cc} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (6)$$

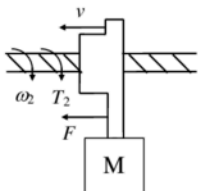


Figura B

Da equação (6) obtém-se as duas relações (7) e (8).

$$i_{CC} = \frac{F}{\eta_{CC} T_2} \rightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC}} \quad (7)$$

$$i_{CC} = \frac{\omega_2}{v} \quad (8)$$

Substituir (7) em (3) para obter (9).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} \quad (9)$$

Substituir (9) em (1) para obter (10).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} \quad (10)$$

b)

Passar para o domínio da frequência a equação (10) para obter (11).

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{F}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} \xrightarrow{TL} \\ T_m(s) &= s J_m \Omega_1(s) + k_{Dm} \Omega_1(s) + \frac{1}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} F(s) \Leftrightarrow \\ T_m(s) - \frac{1}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} F(s) &= (s J_m + k_{Dm}) \Omega_1(s) \Leftrightarrow \\ \frac{\Omega_1(s)}{T_m(s) - \frac{1}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} F(s)} &= \frac{1}{(s J_m + k_{Dm})} \xrightarrow{\cdot k_{Dm}} \frac{\Omega_1(s)}{T_m(s) - \frac{1}{\eta_{CC} i_{CC} \eta_R i_R} F(s)} = \frac{1}{\left(1 + s \frac{J_m}{k_{Dm}}\right)} \end{aligned} \quad (11)$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento para controlo da velocidade angular ω_1 :

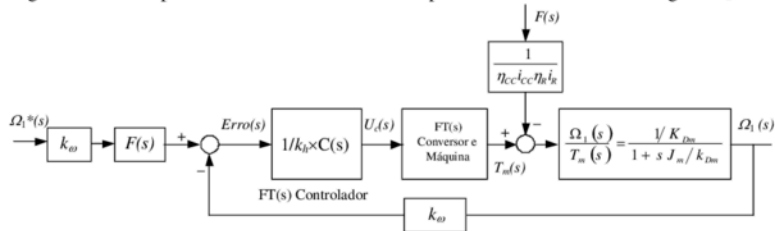


Figura C

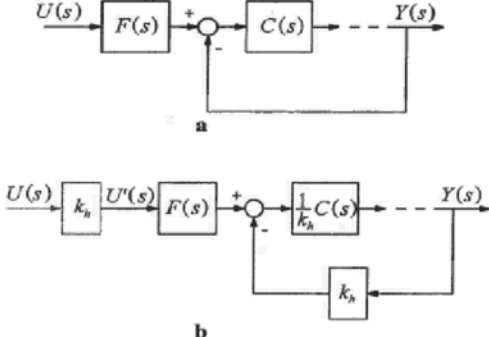


Fig. 5.19 – Alteração nos ganhos dum anel de controlo com realimentação unitária (a) para outro equivalente com ganho k_h na realimentação (b).

- A FT $U_c(s)/\text{Erro}(s)$ representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global.
- A FT $T_m(s)/U_c(s)$ representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor T_m . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT $\Omega_1(s)/T_m(s)$ representa a FT calculada na equação (11).
- A FT $F(s)$ representa a FT do filtro de entrada. Será necessário para cancelar zeros que possam existir na FT global. Se não existirem zeros na FT global a FT do filtro será unitária, ou seja, $F(s)=1$.

Com base na “Figura 5.19” obtém-se a seguinte FT global:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = k_h F(s) \frac{\frac{1}{k_h} C(s) G(s)}{1 + \frac{1}{k_h} C(s) G(s) k_h} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) \frac{C(s) G(s)}{1 + C(s) G(s)}$$

c)

Função de Transferência do compensador PI (12).

$$C(s) = \frac{k_c (1 + s \tau_c)}{s} \quad (12)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, uma solução é utilizar o zero do compensador para anular o pólo dominante da FT (13). O pólo dominante é o que está mais próximo da origem, ou seja, o pólo associado à parte mecânica.

Calcular o valor deste pólo: $1 + s \frac{J_m}{k_{Dm}} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{k_{Dm}}{J_m}$. Considerar que a força F é considerada como uma perturbação e que pode vai ser desprezada na fase de projecto do compensador. O pólo do

compensador PI na origem, permite em regime permanente, a compensação de perturbações do tipo entrada em escalão da força F .

$$\tau_c = \frac{J_m}{k_{Dm}} \quad (13)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema é obtida com (14).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times \frac{K}{(1 + s\tau_e)} \times \frac{1}{k_{Dm}} \quad (14)$$

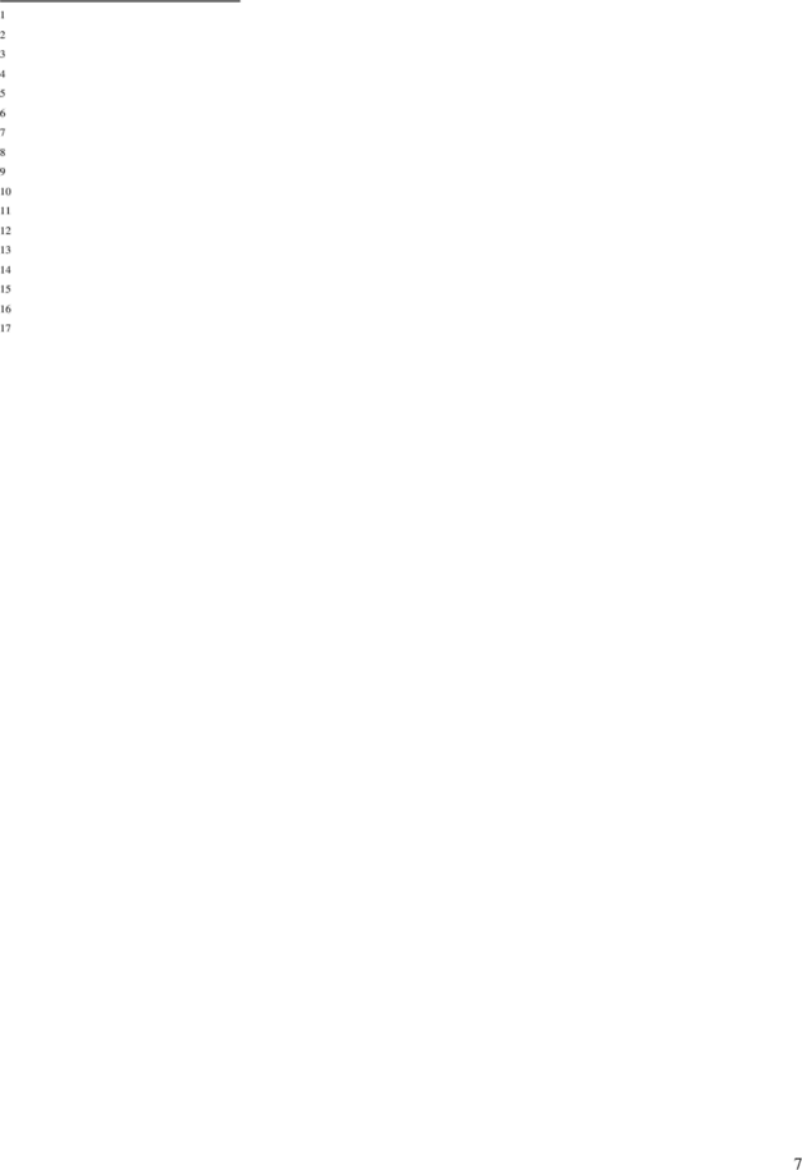
A função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (15).

$$\begin{aligned} FT_{CF} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{k_c}{s} \times \frac{K}{(1 + s\tau_e)} \times \frac{1}{k_{Dm}}}{1 + \frac{k_c}{s} \times \frac{K}{(1 + s\tau_e)} \times \frac{1}{k_{Dm}}} = \frac{k_c K}{s(1 + s\tau_e)k_{Dm}} \times \frac{s(1 + s\tau_e)k_{Dm}}{s(1 + s\tau_e)k_{Dm} + k_c K} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow FT_{CF} = \frac{k_c K}{s^2 \tau_e k_{Dm} + s k_{Dm} + k_c K} \xrightarrow{+\tau_e k_{Dm}} FT_{CF} = \frac{\frac{k_c K}{\tau_e k_{Dm}}}{s^2 + s \frac{1}{\tau_e} + \frac{k_c K}{\tau_e k_{Dm}}} \end{aligned} \quad (15)$$

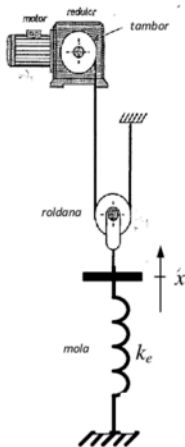
Para dimensionar k_c (12) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214] (17) com um factor de amortecimento de $\xi = \sqrt{2}/2$.

$$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \xrightarrow{\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2} \quad (16)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_o = \frac{1}{\tau_e} \\ \omega_o^2 = \frac{k_c K}{\tau_e k_{Dm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_o = \frac{1}{2\xi\tau_e} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_e} \\ \frac{1}{2\tau_e^2} = \frac{k_c K}{\tau_e k_{Dm}} \Leftrightarrow \frac{\tau_e k_{Dm}}{2\tau_e^2 K} = k_c \Leftrightarrow k_c = \frac{k_{Dm}}{2\tau_e K} \end{cases} \quad (17)$$



I. Considere o sistema da figura ao lado com os seguintes parâmetros: motor eléctrico com o momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} ; redutor com a relação de transmissão i e rendimento η ; tambor com raio de enrolamento suposto constante R ; roldana com a massa M . Na extremidade da roldana existe uma mola com o coeficiente de elasticidade k_e .



a) Para o sentido do movimento do sistema na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear ascendente x , ou seja, $T_m = f(x)$. [cotação: 2 valores]

b) Representar o modelo do sistema na forma de um diagrama de blocos, onde figurem o binário motor T_m como entrada e a posição linear ascendente x como saída. [cotação: 2 valores]

c) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da posição linear x . [cotação: 2 valores]

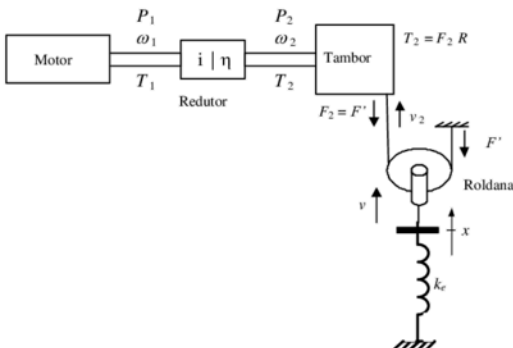
QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

Resolução:

I.
a)



Roldana:

v – velocidade ascensional da roldana

v_2 – velocidade linear do cabo ou do tambor

Força de inércia (Ma) e o peso (Mg) aplicado na roldana (1).

$$F_{Roldana} = Ma + Mg \Leftrightarrow F_{Roldana} = M \frac{dv}{dt} + Mg \quad F_{Roldana} = Ma + Mg \Leftrightarrow F_{Roldana} = M \frac{dv}{dt} + Mg \quad (1)$$

A roldana está suspensa por um cabo onde ambas as pontas partilham a força de suspensão (2).

$$F' + F' = F + F_{Roldana} \Leftrightarrow 2F' = F + F_{Roldana} \Leftrightarrow F' = \frac{F + F_{Roldana}}{2} \xrightarrow{F_2 = F'} F_2 = F' = \frac{F + F_{Roldana}}{2} \quad (2)$$

Relacionar a velocidade ascensional/subida da roldana (v) com a velocidade linear do cabo ou do tambor (v_2) com opção de duas soluções.

Solução 1:

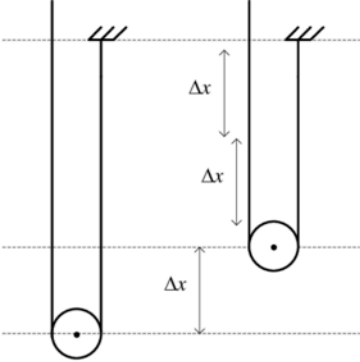
$$(F + F_{Roldana})v = F_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{(F + F_{Roldana})}{F_2} v \xrightarrow{F_2 = \frac{F + F_{Roldana}}{2}} v_2 = \frac{(F + F_{Roldana})}{\frac{F + F_{Roldana}}{2}} v \Leftrightarrow v_2 = 2v \quad (3)$$

Solução 2:

De acordo com a análise da figura seguinte, para um deslocamento Δx da roldana implica um deslocamento $2 \times \Delta x$ de qualquer ponto do cabo. A relação entre o deslocamento Δx da roldana e as velocidades lineares v e v_2 é a seguinte:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = v \quad (4)$$

$$\frac{d(\Delta x + \Delta x)}{dt} = v_2 \Leftrightarrow 2 \frac{d\Delta x}{dt} = v_2 \xrightarrow{\frac{d\Delta x}{dt} = v} 2v = v_2 \Leftrightarrow v_2 = 2v \quad (5)$$



As equações (3) ou (5) podem ser escritas em função da derivada da posição linear x (6).

$$v_2 = 2v \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} v_2 = 2 \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

A dinâmica do tambor é obtida com (7) e (8).

$$v_2 = \omega_2 R \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{R} \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{2v}{R} \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} \omega_2 = \frac{2}{R} \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

$$T_2 = F_2 R \Leftrightarrow T_2 = \left(\frac{F + F_{\text{Roldana}}}{2} \right) R \Leftrightarrow T_2 = \left(\frac{F + M \frac{dv}{dt} + Mg}{2} \right) R \Leftrightarrow \quad (8)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(F + M \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} + Mg \right) R$$

A dinâmica do redutor é obtida com (9) e (10).

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_1 = \frac{P_2}{\eta} \Leftrightarrow T_1 \omega_1 = \frac{T_2 \omega_2}{\eta} \Leftrightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{\eta T_1} \Leftrightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \quad (9)$$

$$\omega_m = \omega_1 \Leftrightarrow \omega_m = i \omega_2 \Leftrightarrow \omega_m = \frac{2i}{R} v \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} \omega_m = \frac{2i}{R} \frac{dx}{dt} \quad (10)$$

A dinâmica do motor é obtida com (11), (12), (13) e (14). Considerar para este problema a força F resultante da mola com coeficiente de elasticidade k_e (desprezar a massa): $F = k_e x$.

$$T_{\text{motor}} = T_{j_m} + T_{k_{\text{dm}}} + T_1 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T_{j_m} &= J_m \frac{d\omega_m}{dt} \Leftrightarrow T_{j_m} = J_m \frac{d\omega_1}{dt} \Leftrightarrow T_{j_m} = J_m i \frac{d\omega_2}{dt} \Leftrightarrow T_{j_m} = J_m \frac{i}{R} \frac{dv_2}{dt} \Leftrightarrow T_{j_m} = J_m \frac{2i}{R} \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \\ T_{j_m} &= J_m \frac{2i}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow T_{j_m} = J_m \frac{2i}{R} \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \omega_m \Leftrightarrow T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \omega_1 \Leftrightarrow T_{k_{Dm}} = k_{Dm} i \omega_2 \Leftrightarrow T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \frac{i}{R} v_2 \Leftrightarrow T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \frac{2i}{R} v \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$T_{k_{Dm}} = k_{Dm} \frac{2i}{R} \frac{dx}{dt}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \Leftrightarrow T_1 \frac{F_2 R}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{\left(\frac{F}{2} + \frac{M}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{Mg}{2} \right) R}{\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MR}{2\eta i} \frac{dv}{dt} + \frac{MgR}{2\eta i} \Leftrightarrow$$

$$T_1 = \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MR}{2\eta i} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{MgR}{2\eta i} \Leftrightarrow T_1 = \frac{R}{2\eta i} F + \frac{MR}{2\eta i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{MgR}{2\eta i} \xrightarrow{F=k_e x} \quad (14)$$

$$T_1 = \frac{R}{2\eta i} k_e x + \frac{MR}{2\eta i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{MgR}{2\eta i}$$

Substituir (12), (13) e (14) em (11) para obter (15).

$$T_{motor} = T_{J_m} + T_{k_{Dm}} + T_1 \Leftrightarrow T_{motor} = \left(J_m \frac{2i}{R} \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \left(k_{Dm} \frac{2i}{R} \frac{dx}{dt} \right) + \left(\frac{R}{2\eta i} k_e x + \frac{MR}{2\eta i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{MgR}{2\eta i} \right) \Leftrightarrow \quad (15)$$

$$T_{motor} = \left(J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} \frac{2i}{R} \frac{dx}{dt} + \frac{R}{2\eta i} k_e x + \frac{MgR}{2\eta i}$$

b)

Passar para o domínio da frequência a equação (15) para obter (16).

$$T_{motor} = \left(J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} \frac{2i}{R} \frac{dx}{dt} + \frac{R}{2\eta i} k_e x + \frac{MgR}{2\eta i} \xrightarrow{TL}$$

$$T_m(s) = s^2 \left(J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) X(s) + s k_{Dm} \frac{2i}{R} X(s) + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} X(s) + \frac{MgR}{2\eta i} \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$T_m(s) - \frac{MgR}{2\eta i} \frac{1}{s} = \left[s^2 \left(J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) + s k_{Dm} \frac{2i}{R} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \right] X(s) + \frac{MgR}{2\eta i} \frac{1}{s} \Leftrightarrow \quad (16)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s) - \frac{MgR}{2\eta i} \frac{1}{s}} = \frac{1}{s^2 \left(J_m \frac{2i}{R} + \frac{MR}{2\eta i} \right) + s k_{Dm} \frac{2i}{R} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}}$$

Diagrama de blocos com a equação (16):

