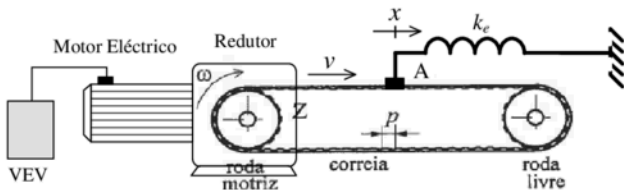


Problema 7B (Época Normal – 18 de Junho de 2019)

I. Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carro e correia dentada. No ponto A da correia dentada existe uma mola com o coeficiente de elasticidade k_e . O motor eléctrico tem momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} . O redutor tem uma relação de transmissão i_R e um rendimento η_R . O sistema carro e correia dentada tem um rendimento η_{CC} , Z número de dentes e um passo p .



a) Para o sentido do movimento do sistema carro e correia dentada indicado na figura, obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da posição linear x , ou seja, $T_m = f(x)$.

[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. O transdutor usado para amostragem da posição linear x tem um ganho k_x (V/m). Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da posição linear x .

[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea anterior, dimensione os parâmetros de um compensador PID, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem. Admita que $K=10$, $\tau_e=1\text{ms}$ e $k_x=1\text{V/m}$. Considere que a FT obtida na alínea a), $X(s)/T_m(s)$, tem ganho 50 e dois pólos reais de valor -10 e -100 .

[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalação</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

Resolução:**a)**

Equação mecânica do sistema obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1) T_1 representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

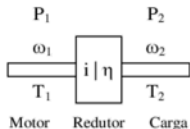


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2).

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) obtém-se as duas relações (3) e (4).

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

A relação de transmissão do sistema carreto e correia dentada é obtido por (4.A). Esta relação é obtida relacionando o ângulo descrito numa rotação de 2π .

$$\frac{2\pi}{Z_p} = \frac{\theta}{x} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{Z_p} = \frac{\omega t}{vt} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{Z_p} = \frac{\omega}{v} \rightarrow i_{cc} = \frac{2\pi}{Z_p} = \frac{\omega}{v} \quad (4.A)$$

Relação entre binário e força do sistema carreto e correia dentada (Figura B) (5).

$$\eta_{FP} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{FP} P_2 \Leftrightarrow vF = \eta_{FP} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

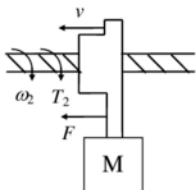


Figura B

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7).

$$i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} \rightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (6)$$

$$i_{FP} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força F , desprezando a massa é obtida por (8).

$$F = k_e x \quad (8)$$

Resolução para controlo de posição x :

Substituir (8) em (6) para obter (9).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (9)$$

Substituir (9) em (3) para obter (10).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (10)$$

Substituir (10) em (1) para obter (11).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (11)$$

Resolver (4) em ordem a ω_2 e substituir em (7) resolvendo em ordem a ω_2 para obter (12).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow{i_{FP} = \frac{\omega_2}{v}} \omega_1 = i_R i_{FP} v \quad (12)$$

Derivando a ordem ao tempo (12) obtém-se (13).

$$\omega_1 = i_R i_{FP} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

Substituir (12) e (13) em (11) obtém-se (14).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear v com o deslocamento x é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (15) em (14) para obter (16).

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \xrightarrow[v = \frac{dx}{dt}]{\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)} T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \Leftrightarrow T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (16)$$

b)

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17).

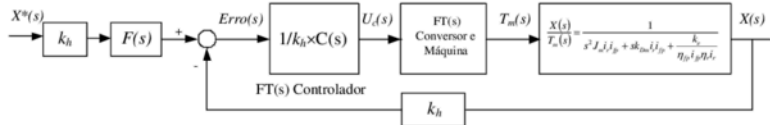
$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \xrightarrow{TL} T_m(s) = s^2 J_m i_R i_{FP} X(s) + s k_{Dm} i_R i_{FP} X(s) + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} X(s) \Leftrightarrow T_m(s) = \left(s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \right) X(s) \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}} \quad (17)$$

Dividir (17) por $J_m i_R i_{FP}$ para obter (18).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}} \xrightarrow{\div J_m i_R i_{FP}} \quad (A)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 \frac{J_m i_R i_{FP}}{J_m i_R i_{FP}} + s \frac{k_{Dm} i_R i_{FP}}{J_m i_R i_{FP}} + \frac{k_e}{J_m i_R i_{FP} \eta_{FP} \eta_R i_R}} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 + s \frac{k_{Dm}}{J_m} + \frac{k_e}{J_m i_R i_{FP} \eta_{FP} \eta_R i_R}} \quad (18)$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento para controlo da posição linear x :



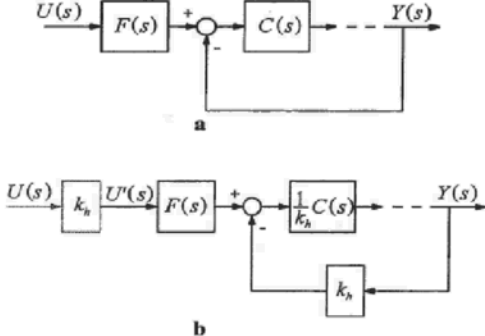


Fig. 5.19 – Alteração nos ganhos dum anel de controlo com realimentação unitária (a) para outro equivalente com ganho k_h na realimentação (b).

- A FT $U_c(s)/\text{Erro}(s)$ representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global.
- A FT $T_m(s)/U_c(s)$ representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor T_m . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT $X(s)/T_m(s)$ representa a FT calculada na equação (18).

c)

Função de transferência de acordo com o enunciado do problema (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 + s \frac{k_{Dm}}{J_m} + \frac{k_e}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_{FP} \eta_R}} \rightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \quad (19)$$

Desenvolvendo (19) de forma a ficar compatível com a FT do compensador PID (20).

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) 100 \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{50}{1000 \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)} \end{aligned} \quad (20)$$

Função de Transferência do compensador PID (21).

$$C(s) = \frac{k_c (1 + s \tau_1) (1 + s \tau_2)}{s} \quad (21)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, é necessário utilizar os dois zeros do compensador para anular os pólos da FT (20).

$$\tau_1 = \frac{1}{10} \quad (22)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{100} \quad (23)$$

Função de transferência da cadeia de acção do sistema (24).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times \frac{k_e}{1 + s\tau_e} \times \frac{5}{1} = \frac{5k_c k_e}{s(1 + s\tau_e)} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)} \quad (24)$$

Função de transferência global do sistema em cadeia fechada (25).

$$\begin{aligned} FT_{CF} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)} \times \frac{100s(1 + s\tau_e)}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \\ &= \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 100\tau_e + 100s + 5k_c k_e} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{\frac{s^2 100\tau_e}{100\tau_e} + \frac{100s}{100\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}} \Leftrightarrow \\ FT_{CF} &= \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{s^2 + s\frac{1}{\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}} \end{aligned} \quad (25)$$

Para dimensionar k_c (27) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

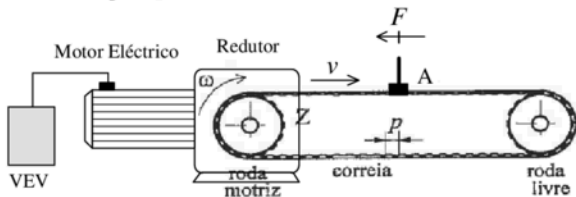
(26) com um factor de amortecimento de $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (26)$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau_e} \\ \omega_n^2 = \frac{5k_c k_e}{100\tau_e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{2\xi\tau_e} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_e} \\ \frac{1}{2\tau_e^2} = \frac{5k_c k_e}{100\tau_e} \Leftrightarrow k_c = \frac{100}{2 \times 5k_e \tau_e} \Leftrightarrow k_c = \frac{100}{2 \times 5 \times 10 \times 1 \times 10^{-3}} = 1000 \end{cases} \quad (27)$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

I. Um motor eléctrico acoplado a um redutor acciona um sistema carreto e correia dentada. No ponto A da correia dentada está aplicada exteriormente uma força F . O motor eléctrico tem momento de inércia J_m e coeficiente de atrito viscoso k_{Dm} . O redutor tem uma relação de transmissão i_R e um rendimento η_R . O sistema carreto e correia dentada tem um rendimento η_{CC} , Z número de dentes e um passo p .



a) Obtenha a equação da dinâmica do motor, T_m , referida à coordenada da força F e velocidade angular de entrada do redutor ω_1 , ou seja, $T_m = f(\omega_1, F)$.
[cotação: 2 valores]

b) O motor eléctrico é alimentado a partir de um variador electrónico de velocidade (VEV). O conjunto formado pelo VEV e o motor eléctrico é controlado adequadamente, permitindo desenvolver um binário (T_m) proporcional a um sinal de comando u_c , e é caracterizado com uma aproximação de primeira ordem à FT: $T_m(s)/U_c(s) = K/(1 + s\tau_e)$, em que K representa o ganho e τ_e a constante de tempo de atraso estatístico. O transdutor usado para amostragem da velocidade ω_1 tem um ganho k_ω (V/rpm). Justificadamente, sem efectuar qualquer tipo de dimensionamento, apresente uma possível solução de um diagrama de blocos representativo de um sistema de accionamento para controlo da velocidade angular de entrada do redutor ω_1 .
[cotação: 2 valores]

c) Para o diagrama de blocos da alínea anterior, dimensione os parâmetros de um **compensador PI**, utilizando o critério mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima de entrada em escalão para sistemas de segunda ordem.
[cotação: 2 valores]

QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$