

Problema 5

Um chopper de quatro quadrantes alimenta uma máquina de corrente contínua com as seguintes características nominais: $U_a=170\text{V}$, $I_a=10,5\text{A}$, $N_n=3000\text{rpm}$, $R=3,5\Omega$, $L=28,0\text{mH}$, $k_a\phi=0,66\text{Nm/A}$, $U_f=310\text{V}$, $r_f=220\Omega$. O ganho estático do conversor electrónico K vale 17.

Esta associação conversor /máquina integra um sistema de controlo de velocidade com cadeia subordinada de corrente.

Na Figura 1 apresenta-se o registo oscilográfico da evolução temporal, durante o processo de arranque da máquina em vazio, da velocidade de referência, da velocidade e da corrente no induzido. A máquina atingiu o regime permanente às 1600rpm, com uma corrente de 0,5A.

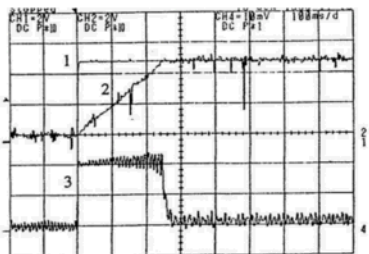


Fig. 1: curva 1 - velocidade de referencia (2V/div)
curva 2 - velocidade da máquina (2V/div)
curva 3 - corrente no induzido (5A/div)

a) Com base na Figura 1, nas especificações/características fornecidas e considerando as aproximações necessárias, determinar:

- A aceleração da máquina durante o arranque e após atingido o regime permanente;
- O coeficiente de atrito viscoso K_D e o momento de inércia J da máquina.

b) Apresentar o diagrama de blocos de conjunto, assumindo compensadores PI para ambas as cadeias de controlo.

c) Calcular a frequência mínima de funcionamento do chopper para que o atraso introduzido pelo conversor electrónico possa ser desprezado no projecto do compensador da cadeia de corrente.

d) Projectar o compensador da cadeia de corrente para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima à entrada escalão segundo o critério mínimo ITAE de 2ª ordem.

e) Projectar o compensador da cadeia de velocidade, considerando uma aproximação de 1ª ordem para o controlo de corrente, para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima à entrada escalão segundo o critério mínimo ITAE de 2ª ordem.

f) Considerar exequível a frequência de funcionamento do chopper determinada na alínea c) e desprezar o pólo associado ao conversor. Projectar, nestas circunstâncias, o compensador da cadeia de corrente para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima entrada escalão segundo o critério do mínimo ITAE.

Resolução:

a1) Determinar a aceleração da máquina durante o arranque e após atingido o regime permanente.

A velocidade de referência é obtida com (1).

$$N_{\text{Ref}} = 1600 \text{rpm} \rightarrow \omega_{\text{Ref}} = N_{\text{Ref}} \frac{2\pi}{60} \Leftrightarrow \omega_{\text{Ref}} = 1600 \times \frac{2\pi}{60} \text{rads}^{-1} \Leftrightarrow \omega_{\text{Ref}} = 167,5 \text{rads}^{-1} \quad (1)$$

Na Figura A (construída a partir da Figura 1 do enunciado do problema) apresenta-se a indicação dos instantes t_1 , t_2 e t_3 bem como a respectiva amplitude da velocidade ω_1 , ω_2 e ω_3 . Esta figura torna-se necessária para a resolução do problema.

Graficamente (Figura 1) é obtido o tempo aproximadamente que a máquina demora até atingir a velocidade de referência (2).

$$t_2 \approx 257,1 \text{ms} \quad (2)$$

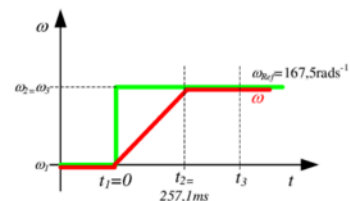


Figura A

Cálculo das acelerações durante o arranque e em regime permanente, obtidas respectivamente por (3) e (4).

$$\text{aceleração} \Big|_{\text{arranque}} = \frac{d\omega}{dt} \Big|_{\text{arranque}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{167,5 - 0}{257,1 \times 10^{-3} - 0} = 651,7 \text{rads}^{-2} \quad (3)$$

$$\text{aceleração} \Big|_{\text{Reg. Permanente}} = \frac{d\omega}{dt} \Big|_{\text{Reg. Permanente}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{t_3 - t_2} = \frac{167,5 - 167,5}{t_3 - t_2} = \frac{0}{t_3 - t_2} = 0 \quad (4)$$

a2) Determinar o coeficiente de atrito viscoso (K_D) e o momento de inércia (J) da máquina.

A equação da dinâmica da máquina é obtida com (5).

$$T_{\text{motor}} = J \frac{d\omega}{dt} + K_D \omega + T_r \xrightarrow{T_r=0} T_{\text{motor}} = J \frac{d\omega}{dt} + K_D \omega \quad (5)$$

Desprezando o tremor da corrente, no arranque e com a máquina em vazio, obtém-se graficamente a partir da Figura 1 (curva 3, ganho vertical de 5A/div) a corrente i_{arranque} (6).

$$i_{\text{arranque}} = 10 \text{A} \quad (6)$$

No arranque desprezar o atrito viscoso admitindo que $K_D \omega \ll J \frac{d\omega}{dt}$

Cálculo do momento de inércia J (7) a partir da equação da dinâmica (5) com a corrente no arranque (6) e aceleração no arranque (3).

$$T_{\text{arranque}} \cong J \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow J = \frac{T_{\text{arranque}}}{\frac{d\omega}{dt}} \xrightarrow{T=k_a \phi_a} J = \frac{k_a \phi_a}{\frac{d\omega}{dt}} \Leftrightarrow J = \frac{0,66 \times 10}{651,7} \Leftrightarrow J = 0,01 \text{kgm}^2 \quad (7)$$

De acordo com o enunciado do problema, em regime permanente e com a máquina em vazio obtém-se (8), (9) (Figura 1, curva 3, ganho vertical de 5A/div).

$$N_{\text{Ref}} = 1600 \text{rpm} \xrightarrow{\times \frac{2\pi}{60}} \omega_{\text{Ref}} = 167,5 \text{rads}^{-1} \quad (8)$$

$$i = 0,5 \text{A} \quad (9)$$

Em regime permanente a variação da velocidade é nula $\frac{d\omega}{dt} = 0$, conforme equação (4). Calcular de K_D (10) a partir da equação da dinâmica (5).

$$T_{\text{Reg Permanente}} = K_D \omega \Leftrightarrow K_D = \frac{T_{\text{Reg Permanente}}}{\omega} \xrightarrow{T=k_a \phi_a} = \frac{k_a \phi_a}{\omega} = \frac{0,66 \times 0,5}{167,5} \Leftrightarrow K_D = 0,002 \text{Nms} \quad (10)$$

b) Apresentar o diagrama de blocos de conjunto, assumindo PI em ambas as cadeias de controle.

Diagrama de blocos com a cadeia de controle de corrente e velocidade (Figura B). São utilizados controladores/compensadores do tipo PI.

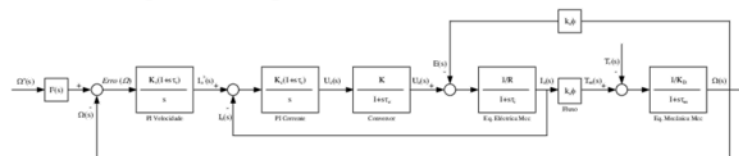


Figura B

Identificação dos blocos/FT:

Filtro de entrada: $F(s)$

$$\text{PI de Velocidade: } \frac{K_v(1+s\tau_v)}{s}$$

$$\text{PI de Corrente: } \frac{K_c(1+s\tau_c)}{s}$$

O conjunto circuito de comando e circuito de potência obtido com (10.1).

$$\frac{U_a(s)}{U_c(s)} = \frac{K}{1+s\tau_e} \quad (10.1)$$

Dinâmica da parte eléctrica (10.2) e dinâmica da parte mecânica (10.3): restantes blocos/FT.

Dinâmica da parte eléctrica da máquina (10.2).

$$\begin{cases} u_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + e \\ e = k_a \phi \omega \\ T = k_a \phi i_a \end{cases} \xrightarrow{\pi} \begin{cases} U_a(s) = RI_a(s) + sLI_a(s) + E(s) \\ E(s) = k_a \phi \Omega(s) \\ T(s) = k_a \phi I_a(s) \end{cases} \xrightarrow[\tau_i = \frac{L}{R}]{\tau_i = \frac{L}{R}} \frac{I_a(s)}{U_a(s) - E(s)} = \frac{1/R}{1 + s\tau_i} \quad (10.2)$$

Dinâmica da parte mecânica da máquina (10.3).

$$\begin{aligned} T = J \frac{d\omega}{dt} + k_D \omega + T_r &\xrightarrow{\pi} T(s) = sJ\Omega(s) + k_D\Omega(s) + T_r(s) \Leftrightarrow \\ T(s) - T_r(s) &= (sJ + k_D)\Omega(s) \Leftrightarrow \frac{\Omega(s)}{T(s) - T_r(s)} = \frac{1}{sJ + k_D} \xrightarrow[\tau_m = \frac{J}{k_D}]{\tau_m = \frac{J}{k_D}} \frac{\Omega(s)}{T(s) - T_r(s)} = \frac{1/k_D}{1 + s\tau_m} \end{aligned} \quad (10.3)$$

c) Calcular a frequência mínima de funcionamento do chopper para que o atraso introduzido pelo conversor electrónico possa ser desprezado no projecto do compensador da cadeia de corrente.

Bloco representativo do modelo dinâmico simplificado do circuito de comando e conversor, com uma aproximação a um sistema de 1ª ordem, caracterizado por um ganho K e um atraso estatístico τ_e (Figura C).

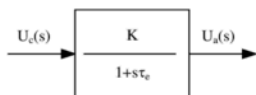


Figura C

Onde $\tau_e = \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau_e = \frac{1}{2f}$ representa o atraso estatístico [Palma 1999; 4.3.5, (4.17) pp. 145].

Para ser desprezado o pólo do conversor ($1+s\tau_e=0 \Leftrightarrow s=-1/\tau_e$) tem que se verificar $\tau_i \gg \tau_e$ (11) [Palma 1999; 5.2.3, pp. 206].

$$\tau_i > 10\tau_e \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_e} > 10 \frac{1}{\tau_i} \quad (11)$$

Onde τ_i representa a constante de tempo eléctrica da máquina, $\tau_i = L/R$.

Determinação da frequência mínima obtida com (14) e substituição de (12) e (13).

$$\tau_i = \frac{L}{R} = \frac{28 \times 10^{-3}}{3,5} \Leftrightarrow \tau_i = 8\text{ms} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\tau_e} > 10 \frac{1}{\tau_i} \Leftrightarrow \tau_e < \frac{\tau_i}{10} \Leftrightarrow \tau_e < 0,8\text{ms} \quad (13)$$

$$\tau_e = \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau_e = \frac{1}{2f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\tau_e} \rightarrow f > \frac{1}{2\tau_e} \Leftrightarrow f > \frac{1}{2 \times 0,8 \times 10^{-3}} \Leftrightarrow f > 625\text{Hz} \quad (14)$$

d) Projectar o compensador da cadeia de corrente para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima à entrada escalão segundo o critério mínimo ITAE de 2ª ordem.

Diagrama de blocos para o dimensionamento da cadeia de controlo de corrente representado na Figura D, tendo por base a Figura B. Desprezar a dinâmica da $E(s)$ com a seguinte justificação: i) menor dinâmica relativamente à imposição de correntes do conversor, ii) existência de um pólo na origem do PI de corrente ($s=0$).

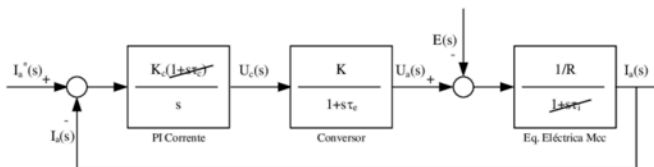


Figura D

Utilizar o zero do compensador para anular o pólo dominante ($\tau_i > \tau_e$; $8\text{ms} > 0,8\text{ms}$; pode-se verificar a condição $>2\times$) (15) [Palma 1999; 5.4.2, Eq. (5.24), pp. 230 e 234].

$$1 + s\tau_e = 1 + s\tau_i \Leftrightarrow \tau_e = \tau_i \Leftrightarrow \tau_e = \frac{L}{R} \Leftrightarrow \tau_e = 8\text{ms} \quad (15)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema é obtida com (16).

$$G(s) = \frac{K_c}{s} \frac{K}{1 + s\tau_e} \frac{1}{R} \Leftrightarrow G(s) = \frac{\frac{K_c K}{R}}{s(1 + s\tau_e)} \quad (16)$$

A função de transferência global do sistema em cadeia fechada é obtida com (17).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \xrightarrow{H(s)=1} FT_{CF} = \frac{\frac{K_c K}{R}}{s(1 + s\tau_e) + \frac{K_c K}{R}} = \frac{K_c K}{Rs(1 + s\tau_e) + K_c K} = \frac{\frac{K_c K}{R\tau_e}}{s^2 + s\frac{1}{\tau_e} + \frac{K_c K}{R\tau_e}} \quad (17)$$

Para dimensionar K_c (18) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp.

$$214]: s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2; \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau_e} \\ \omega_n^2 = \frac{K_c K}{R\tau_e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \frac{1}{2\xi\tau_e} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_e} \\ \frac{K_c K}{R\tau_e} = \frac{1}{2\tau_e^2} \Leftrightarrow K_c = \frac{R}{2K\tau_e} \Leftrightarrow K_c = \frac{3,5}{2 \times 17 \times 0,8 \times 10^{-3}} \Leftrightarrow K_c = 128,6 \end{array} \right. \quad (18)$$

e) Projectar o compensador da cadeia de velocidade, considerando uma aproximação de 1ª ordem para o controlo de corrente, para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima à entrada escalão segundo o critério mínimo de ITAE 2ª ordem.

Como o coeficiente de amortecimento da cadeia de controlo de corrente é suficientemente elevado, superior a 0,6 (condição garantida pelo ITAE 2ª ordem $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$) pode fazer-se uma aproximação de 1ª ordem a esta cadeia de controlo [Palma 1999; 5.2.3, Eq. (5.13a), pp. 207; 6.3.2, pp. 265 e 6.3.3, pp. 273].

Simplificação de 1ª ordem para a cadeia de controlo de corrente (17) [Palma 1999; 5.2.3, (5.13a), pp. 207 e 6.3.3, pp. 273]:

$$FT_{CFcorrente} = \frac{\frac{K_c K}{R\tau_e}}{s^2 + s \frac{1}{\tau_e} + \frac{K_c K}{R\tau_e}} \quad (19)$$

Simplificar (19) para obter (20).

$$FT_{CFcorrente} = \frac{\frac{K_c K}{R\tau_e}}{s^2 + s \frac{1}{\tau_e} + \frac{K_c K}{R\tau_e}} \xrightarrow{s^2=0} FT_{CFcorrente} \approx \frac{\frac{K_c K}{R\tau_e}}{s \frac{1}{\tau_e} + \frac{K_c K}{R\tau_e}} \xrightarrow{\times \frac{R\tau_e}{K_c K}} FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s \frac{R}{K_c K}} \quad (20)$$

Substituir $K_c = \frac{R}{2K\tau_e}$ de (18) em (20) para obter (21).

$$FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s \frac{R}{K_c K}} \xrightarrow{K_c = \frac{R}{2K\tau_e}} FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s \frac{R}{\frac{R}{2K\tau_e} K}} \Leftrightarrow FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s 2\tau_e} \quad (21)$$

A aproximação a um sistema de 1ª ordem anterior é equivalente a aproximar os pólos do sistema

$$(17) \quad \left(\frac{\frac{K_c K}{R \tau_e}}{s^2 + s \frac{1}{\tau_e} + \frac{K_c K}{R \tau_e}} \right) \text{ a apenas um pólo real localizado na abcissa respectiva } -b/2a$$

$$\left(s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \text{ (Figura E).}$$

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1/\tau_e}{2} = -\frac{1}{2\tau_e} \quad (22)$$

$$FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s 2\tau_e} \xrightarrow{\tau=2\tau_e} FT_{CFcorrente} = \frac{1}{1 + s \tau} \quad (23)$$

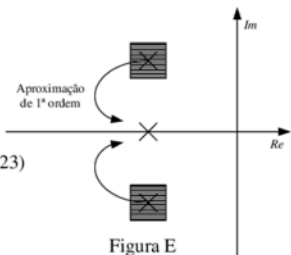


Diagrama de blocos para o controlo de velocidade com aproximação de 1ª ordem do controlo de corrente, tendo por base a figura B, figura D e (23).

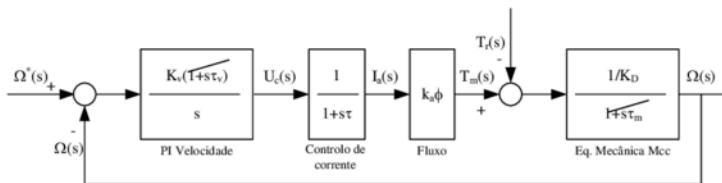


Figura F

$$\text{Onde } \tau = 2\tau_e \Leftrightarrow \tau = 2 \times 0,8 \Leftrightarrow \tau = 1,6\text{ms}$$

Uma vez que $\tau_m > 2\tau$, utiliza-se o zero do controlador para cancelar o pólo dominante [Palma

$$1999; 5.4.3, (5.25), \text{ pp. 234 e 6.3.3, pp. 274}]: \tau_m = \frac{J}{K_D} \Leftrightarrow \tau_m = \frac{0,01}{0,002} \Leftrightarrow \tau_m = 5\text{s e}$$

$$2\tau = 2(2\tau_e) \Leftrightarrow 2\tau = 2 \times 2 \times 0,8 \Leftrightarrow 2\tau = 3,2\text{ms}$$

$$1 + s\tau_v = 1 + s\tau_m \Leftrightarrow \tau_v = \tau_m = 5\text{s}$$

$$(24)$$

A função de transferência da cadeia de acção do sistema, com $T_r(s) = 0$ é obtida com (25).

$$G(s) = \frac{\frac{K_v k_a \phi}{K_D}}{s(1+s\tau)} \quad (25)$$

A função de transferência do sistema em cadeia fechada é obtida com (26).

$$FT_{CF} = \frac{\frac{K_v}{s} \frac{1}{1+s\tau} k_a \phi \frac{1}{K_D}}{1 + \frac{K_v}{s} \frac{1}{1+s\tau} k_a \phi \frac{1}{K_D}} = \frac{K_v k_a \phi}{K_D s(1+s\tau) + K_v k_a \phi} = \frac{\frac{K_v k_a \phi}{K_D \tau}}{s^2 + s \frac{1}{\tau} + \frac{K_v k_a \phi}{K_D \tau}} \quad (26)$$

Para dimensionar K_v (27) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp.

$$214]: s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2; \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau} \\ \omega_n^2 = \frac{K_v k_a \phi}{K_D \tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{2\xi\tau} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \\ \frac{K_v k_a \phi}{K_D \tau} = \frac{1}{2\tau^2} \Leftrightarrow K_v = \frac{K_D}{2k_a \phi \tau} \Leftrightarrow K_v = \frac{0,002}{2 \times 0,66 \times 1,6 \times 10^{-3}} = 0,95 \end{cases} \quad (27)$$

Uma vez que não existem zeros na função de transferência em cadeia fechada, equação (26), obtém-se para o filtro de entrada um ganho unitário (28).

$$F(s) = 1 \quad (28)$$

f) Considerar exequível a frequência de funcionamento do chopper determinada na alínea c) e desprezar o pólo associado ao conversor. Projectar, nestas circunstâncias, o compensador da cadeia de corrente para que esta cadeia de controlo possua resposta óptima entrada escalão segundo o critério do mínimo ITAE.

Sem a dinâmica do pólo associado ao conversor ($\tau_c=0$), o diagrama de blocos simplificado para o dimensionamento da cadeia de controlo de corrente está representado na Figura G.

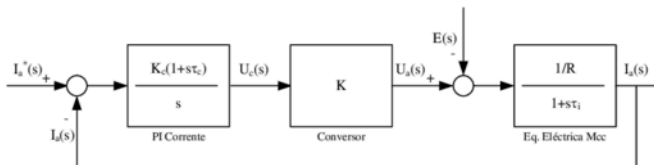


Figura G

A função de transferência da cadeia de ação do sistema é obtida com (29).

$$G(s) = \frac{\frac{K_c K}{R}(1 + s\tau_c)}{s(1 + s\tau_i)} \quad (29)$$

A função de transferência do sistema em cadeia fechada obtida com (30).

$$FT_{CF} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \xrightarrow{H(s)=1} FT_{CF} = \frac{\frac{K_c K}{R}(1 + s\tau_c)}{s(1 + s\tau_i) + \frac{K_c K}{R}(1 + s\tau_c)} = \frac{\frac{K_c K}{R\tau_i}(1 + s\tau_c)}{s^2 + s\frac{1}{\tau_i} + \frac{K_c K}{R\tau_i}} \quad (30)$$

O zero na função de transferência em cadeia fechada (30) é indesejável, uma forma de o eliminar é considerá-lo muito rápido e desprezá-lo para a realização do dimensionamento, ou seja $\tau_c \ll \tau_i$, conforme equação (33). A localização do zero e pólo será: $\tau_c \ll \tau_i \Leftrightarrow 1/\tau_c \ll 1/\tau_i$.

Desta forma, a equação (31) será a função de transferência simplificada para efeitos de dimensionamento.

$$FT_{CF} = \frac{\frac{K_c K}{R\tau_i}}{s^2 + s\frac{1}{\tau_i} + \frac{K_c K}{R\tau_i}} \quad (31)$$

Para dimensionar K_c (32) aplica-se o critério ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2; \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau_i} \\ \omega_n^2 = \frac{K_c K}{R\tau_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{2\xi\tau_i} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_i} \\ \frac{K_c K}{R\tau_i} = \frac{1}{2\tau_i^2} \Leftrightarrow K_c = \frac{R}{K\tau_i} \Leftrightarrow K_c = \frac{3,5}{2 \times 17 \times \frac{28 \times 10^{-3}}{3,5}} \Leftrightarrow K_c = 12,86 \end{cases} \quad (32)$$

$$\tau_c \ll \tau_i \quad (33)$$

Bibliografia:

Palma, J. (1999), "Accionamentos Electromecânicos de Velocidade Variável", Fundação Calouste Gulbenkian, 1999, ISBN 972-31-0839-9.

Problema 6.

Um conversor electrónico de potência alimenta uma máquina de corrente contínua de excitação separada da qual se conhece o valor da resistência do induzido $R=1\Omega$ e a constante de binário $k_a\phi=1\text{Nm/A}$. Este sistema (conversor máquina) foi ensaiado em cadeia aberta, tendo-se concluído que a resposta da função de transferência velocidade/tensão de comando $\Omega(s)/U_c(s)$ é modelada pelo mapa de pólos e zeros indicado (Figura b). Em regime permanente, 1V corresponde 100rpm.

Com este sistema pretende-se realizar um controlo de velocidade com a estrutura indicada no diagrama seguinte, (Figura a).

a) Determinar a constante de tempo de atraso estatístico do conversor τ_c , a constante de tempo do induzido τ_i , o momento de inércia J e o ganho K .

b) Utilizando o critério do mínimo ITAE, relativamente à resposta óptima para entrada escalão, para sistemas de segunda ordem, dimensionar os parâmetros do compensador $C(s)$ e do filtro de entrada $F(s)$.

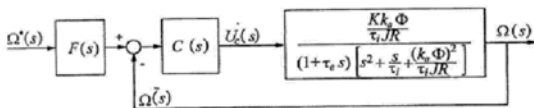


Figura a

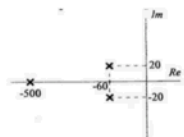


Figura b

Resolução:

a) Determinar a constante de tempo de atraso estatístico do conversor τ_c , a constante de tempo do induzido τ_i , o momento de inércia J e o ganho K .

Determinação da constante τ_c :

Do mapa de pólos e zeros (Figura b) retira-se um pólo real obtido por (1).

$$1 + s\tau_c = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\tau_c} = -500 \Leftrightarrow -500 = -\frac{1}{\tau_c} \Leftrightarrow \tau_c = \frac{1}{500} \Leftrightarrow \tau_c = 2\text{ms} \quad (1)$$

Determinação da constante τ_i e momento de inércia J obtido com duas soluções:

Solução A

Relacionando a função de transferência (Figura a) com a localização dos dois pólos complexos conjugados (Figura b) obtém-se (2).

$$\begin{aligned} s^2 + s\frac{1}{\tau_i} + \frac{(k_a\phi)^2}{\tau_iJR} &= [s + (60 + j20)][s + (60 - j20)] \Leftrightarrow \\ s^2 + s\frac{1}{\tau_i} + \frac{(k_a\phi)^2}{\tau_iJR} &= s^2 + 60s - j20s + 60s + j20s + 60^2 - j20 \times 60 + j20 \times 60 + 20^2 \Leftrightarrow \\ s^2 + s\frac{1}{\tau_i} + \frac{(k_a\phi)^2}{\tau_iJR} &= s^2 + 120s + 4000 \end{aligned} \quad (2)$$