

b) Considerar que as perdas mecânicas variam directamente com a velocidade, calcular a tensão aplicada ao motor se a velocidade for 750rpm, com o binário nominal aplicado.

Potência para uma velocidade de 750rpm e o binário nominal aplicado (8).

$$P_{750\text{rpm}} = T_N \omega \Leftrightarrow P_{750\text{rpm}} = 20 \times \frac{2\pi}{60} \times 750 \Leftrightarrow P_{750\text{rpm}} = 1570\text{W} \quad (8)$$

A potência de perdas para uma velocidade de 1500rpm (calculada na alínea a) é obtida por (9).

$$P_{mec} = \frac{P_{PT}}{2} \quad (9)$$

A potência de perdas mecânicas para uma velocidade de 750rpm é obtida por (10) (admitindo que a relação de perdas é linear). A potência de perdas totais (P_{PT}) foi calculada em (5).

$$P_{mec_{750\text{rpm}}} = \frac{P_{PT}}{2} \Leftrightarrow P_{mec_{750\text{rpm}}} = \frac{P_{PT}}{4} \Leftrightarrow P_{mec_{750\text{rpm}}} = \frac{555}{4} \Leftrightarrow P_{mec_{750\text{rpm}}} = 138,8\text{W} \quad (10)$$

A potência absorvida (P_{abs}) (11) é calculada com (10) e (7). Como o binário aplicado é o binário nominal, a potência de perdas de Joule é igual ao calculado em (7).

$$P_{abs} = P_{750\text{rpm}} + P_{mec_{750\text{rpm}}} + P_{Joule} \Leftrightarrow P_{abs} = 1570 + 138,8 + \frac{555}{2} \Leftrightarrow P_{abs} = 1986,3\text{W} \quad (11)$$

A tensão aplicada ao motor (12) é calculada com a potência absorvida (P_{abs}) (11).

$$P_{abs} = U_{abs} I_{abs} \Leftrightarrow U_{abs} = \frac{P_{abs}}{I_{abs}} \Leftrightarrow U_{abs} = \frac{1986,3}{16,8} \Leftrightarrow U_{abs} = 118,23\text{V} \quad (12)$$

c) Estando o motor excitado e parado, foi aplicado no induzido uma corrente de $2I_N = I_a$ até o motor atingir a velocidade de 1500rpm. Calcular o intervalo de tempo que esteve aquela corrente aplicada ao motor (desprezar as perdas mecânicas).

Considerar que o motor está em vazio com o momento de inércia J e o atrito viscoso K_D . No arranque do motor e até atingir o regime estacionário prevalece a componente associada ao momento de inércia pelo que se despreza o atrito viscoso (13).

$$T_m = J \frac{d\omega}{dt} + K_D \omega \xrightarrow{K_D \omega = 0} T_m = J \frac{d\omega}{dt} \quad (13)$$

O binário é proporcional à corrente e é obtido por (13.1).

$$T_m = f(I_a) \Rightarrow 2T_N = f(2I_a) \quad (13.1)$$

Substituir (13.1) em (13) e resolver a equação em ordem a t para obter (14).

$$T_m = J \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{J} \int_0^t T_m dt \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{J} T_m t \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{J\omega}{T_m} \xrightarrow{T_m = 2T_N} t = \frac{0,1 \times 1500 \times \frac{2\pi}{60}}{2 \times 20} \Leftrightarrow t = 0,39\text{s} \quad (14)$$

Problema 4

Considerar o diagrama de blocos da máquina de corrente contínua com fluxo constante representado na figura [Página 55, Palma, 1999].

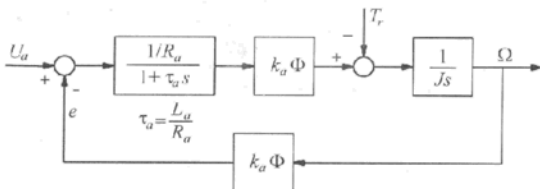


Fig. 3.7 — Diagrama de blocos da máquina com fluxo constante.

- Obter a FT da velocidade em função da tensão aplicada na armadura/induzido.
- Obter a FT da velocidade em função do binário resistente.
- Com base nos dados nominais de várias máquinas de corrente contínua, conforme Quadro 6.1 [Página 257, Palma, 1999], calcular os pólos da máquina em vazio.
- Com base nos dados nominais de várias máquinas de corrente contínua, conforme Quadro 6.1 [Página 257, Palma, 1999], calcular os pólos da máquina com carga nominal suposta linear com $T_n = K_D \omega_n$ e $J_{total} = 2J$

Nota: De acordo com a figura 3.7, nos desenvolvimentos matemáticos seguintes, foram consideradas as seguintes correspondências: $R = R_a$, $L = L_a$, e $\tau_i = \tau_a$

- Obter a FT da velocidade em função da tensão aplicada na armadura/induzido.

Considerar $T_r(s) = 0$ para obter (1) com (0.1) e (0.2).

$$G(s) = \frac{1}{R} k_a \phi \frac{1}{Js} \quad (0.1)$$

$$H(s) = k_a \phi \quad (0.2)$$

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{R} k_a \phi \frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{R} k_a \phi \frac{1}{Js} k_a \phi} = \frac{\frac{k_a \phi}{R}}{(1 + \tau_i s) Js} = \frac{\frac{k_a \phi}{R \tau_i J}}{s^2 + \frac{1}{\tau_i} s + \frac{(k_a \phi)^2}{R \tau_i J}} \quad (1)$$

b) Obter a FT da velocidade em função do binário resistente.

Considerar $U_a(s) = 0$ para obter (2) com (0.3) e (0.4).

$$G(s) = \frac{1}{Js} \quad (0.3)$$

$$H(s) = \frac{1/R}{1 + \tau_i s} k_a \phi \quad (0.4)$$

$$\frac{\Omega(s)}{T_r(s)} = -\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = -\frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js} \frac{R}{1 + \tau_i s} k_a \phi} = -\frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js} \frac{(k_a \phi)^2}{1 + \tau_i s} / R} = -\frac{\frac{1 + \tau_i s}{\tau_i J}}{s^2 + \frac{1}{\tau_i} s + \frac{(k_a \phi)^2}{R \tau_i J}} \quad (2)$$

c) Com base nos dados nominais de várias máquinas de corrente contínua, conforme Quadro 6.1 [Página 257, Palma, 1999], calcular os pólos da máquina em vazio.

Calcular os pólos da equação (1), a partir da equação característica (fórmula resolvente) (3), com os parâmetros das quatro máquinas, M1, M2, M3 e M4, indicados no quadro 6.1.

$$as^2 + bs + c = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow[\substack{a=1 \\ b=\frac{1}{\tau_i} \\ c=\frac{(k_a \phi)^2}{R \tau_i J}}]{s} s = \frac{-\frac{1}{\tau_i} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_i}\right)^2 - 4 \frac{(k_a \phi)^2}{R \tau_i J}}}{2} \quad (3)$$

Os dois valores próprios (ou pólos) são dependentes dos parâmetros electromagnéticos ($k_a \Phi$, R , L). A FT $\Omega(s)/U_a(s)$ é de segunda ordem. **Os pólos podem ser reais ou complexos conjugados.** São estes valores próprios que regem o comportamento dinâmico da máquina (determinam o regime livre do sistema). O exemplo de código seguinte em *Matlab* permite com utilização da equação (3), o cálculo dos pólos e respectivo lugar das raízes indicados no quadro 6.1. No *Matlab* obter mais informações sobre a instrução “*pzmap*”.

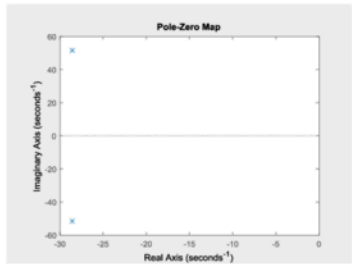
```
clc; clear all;
%Maquina M1
kafi=0.475; J=0.0012; Tao_i=17.5e-3; R=3.09; L=54.1e-3;
%H(s)=[0 0 kafi/(R*tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*tao_i*J)];
H = tf([0 0 kafi/(R*Tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*Tao_i*J)]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), % [p,z] = pzmap(sys)
```

```
clc; clear all;
%Maquina M2
kafi=0.286; J=0.005; Tao_i=2.06e-3; R=0.28; L=0.57e-3;
%H(s)=[0 0 kafi/(R*tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*tao_i*J)];
H = tf([0 0 kafi/(R*Tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*Tao_i*J)]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), % [p,z] = pzmap(sys)
```

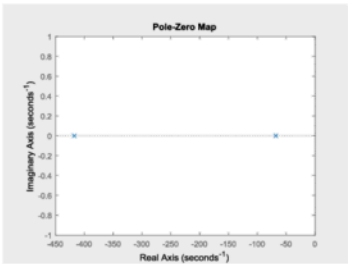
```
clc; clear all;
%Maquina M3
kafi=1.09; J=0.014; Tao_i=6.94e-3; R=0.62; L=4.31e-3;
```

```
%H(s)=[0 0 kafi/(R*tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*tao_i*J)];
H = tf([0 0 kafi/(R*Tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*Tao_i*J)]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), %[p,z] = pzmap(sys)

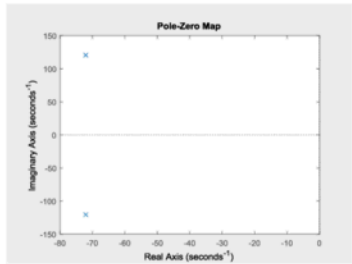
clc; clear all;
%Maquina M4
kafi=2.18; J=1.3; Tao_i=24.8e-3; R=0.058; L=1.44e-3;
%H(s)=[0 0 kafi/(R*tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*tao_i*J)];
H = tf([0 0 kafi/(R*Tao_i*J)], [1 1/Tao_i (kafi)^2/(R*Tao_i*J)]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), %[p,z] = pzmap(sys)
```



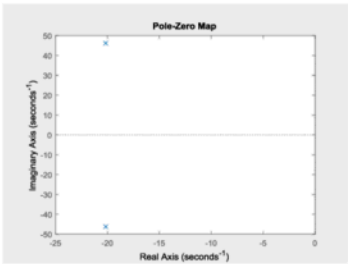
M1: Lugar das raízes.



M2: Lugar das raízes.



M3: Lugar das raízes.



M4: Lugar das raízes.

Tabela: Resumo dos pólos e zeros das máquinas M1, M2, M3 e M4.

Máquina M1	Máquina M2	Máquina M3	Máquina M4
polos = -28.5714 +51.5821i -28.5714 -51.5821i	polos = -417.5047 -67.9322	polos = 1.0e+02 * -0.7205 + 1.2055i -0.7205 - 1.2055i	polos = -20.1613 +46.2063i -20.1613 -46.2063i
zeros = 0	zeros = 0	zeros = 0	zeros = 0

d) Com base nos dados nominais de várias máquinas de corrente contínua, conforme Quadro 6.1 [Página 257, Palma, 1999], calcular os pólos da máquina com carga nominal suposta linear com $T_n = K_D \omega_n$ e $J_{total} = 2J$

Considerar $T_r = T_n \Leftrightarrow T_n = K_D \omega_n$ e $J_{total} = 2J$ conforme representado na figura seguinte. Esta figura foi adaptada a partir da existente no enunciando do problema com a introdução da malha com o coeficiente de atrito viscoso K_D ($T_r = K_D \omega$).

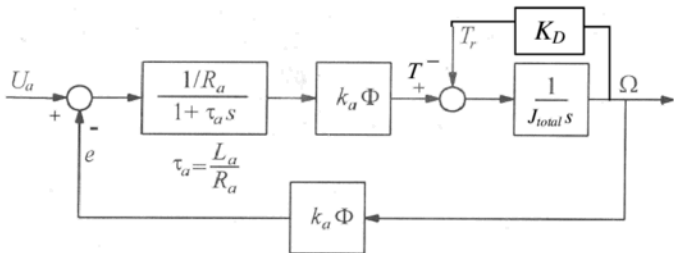


Fig. 3.7 – Diagrama de blocos da máquina com fluxo constante.

Cálculo o coeficiente de atrito viscoso K_D com (4).

$$T_n = K_D \omega_n \Leftrightarrow K_D = \frac{T_n}{\omega_n} \Leftrightarrow K_D = \frac{T_n}{N_n \frac{2\pi}{60}} \quad (4)$$

Calcular a FT $\Omega(s)/T(s)$ com (5).

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{T(s)} &= \frac{\frac{1}{J_{total}s}}{1 + \frac{1}{J_{total}s} K_D} = \frac{1}{J_{total}s} \frac{J_{total}s}{J_{total}s + K_D} = \frac{1}{J_{total}s + K_D} \xrightarrow{\cdot K_D} \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{K_D}}{1 + \frac{J_{total}}{K_D}s} \\ &\xrightarrow{\tau_m = \frac{J_{total}}{K_D}} \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{K_D}}{1 + \tau_m s} \end{aligned} \quad (5)$$

Calcular a FT $\Omega(s)/U_a(s)$ com (6).

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \Leftrightarrow \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{\frac{1}{R}}{1 + \tau_i s} k_a \phi \frac{\Omega(s)}{T(s)}}{1 + \frac{\frac{1}{R}}{1 + \tau_i s} k_a \phi \frac{\Omega(s)}{T(s)} k_a \phi} \quad (6)$$

Substituir a equação (5) em (6) para obter (7).

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} &= \frac{\frac{1}{R} k_a \phi \frac{\Omega(s)}{T(s)}}{1 + \frac{R}{1 + \tau_i s} k_a \phi \frac{\Omega(s)}{T(s)} k_a \phi} = \frac{\frac{1}{R} k_a \phi \frac{1}{1 + \tau_m s}}{1 + \frac{R}{1 + \tau_i s} k_a \phi \frac{1}{1 + \tau_m s} k_a \phi} = \frac{\frac{k_a \phi}{RK_D}}{1 + \frac{k_a \phi}{(1 + \tau_i s)(1 + \tau_m s)} k_a \phi} = \\ &= \dots = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{k_a \phi}{RK_D \tau_i \tau_m}}{s^2 + \frac{\tau_i + \tau_m}{\tau_i \tau_m} s + \frac{1}{\tau_i \tau_m} + \frac{(k_a \phi)^2}{RK_D \tau_i \tau_m}} \end{aligned} \quad (7)$$

Calcular os pólos da equação (7), a partir da equação característica (fórmula resolvente) (8), com os parâmetros das quatro máquinas, M1, M2, M3 e M4, indicados no quadro 6.1.

$$as^2 + bs + c = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow[\substack{a=1 \\ b=\frac{\tau_i + \tau_m}{\tau_i \tau_m} \\ c=\frac{1}{\tau_i \tau_m} + \frac{(k_a \phi)^2}{RK_D \tau_i \tau_m}}]{s = \frac{-\frac{1}{\tau_i} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_i}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{\tau_i \tau_m} + \frac{(k_a \phi)^2}{RK_D \tau_i \tau_m}\right]}}{2}} \quad (8)$$

Os dois valores próprios (ou pólos) são dependentes dos parâmetros electromagnéticos ($k_a \Phi$, R , L , J , K_D). A FT $\Omega(s)/U_a(s)$ é de segunda ordem. **Os pólos podem ser reais ou complexos conjugados.** São estes valores próprios que regem o comportamento dinâmico da máquina (determinam o regime livre do sistema).

O exemplo de código seguinte em *Matlab* permite com utilização da equação (7), o cálculo dos pólos e respectivo lugar das raízes indicados no quadro 6.1.

```
clc; clear all;
%Maquina M1
kafi=0.475; J=0.0012; Tao_i=17.5e-3; R=3.09; L=54.1e-3;
N=3000; Tn=2.2; KD=Tn/(N*2*pi/60); %KD=Tn/wn;
Jtotal=2*J; Tao_m=Jtotal/KD;
%H(s)=(kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m))/(s^2 + (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m)*s + (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m)))
H = tf([0 0 kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m)], [1 (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m) (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m))]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), %[p,z] = pzmap(sys)
```

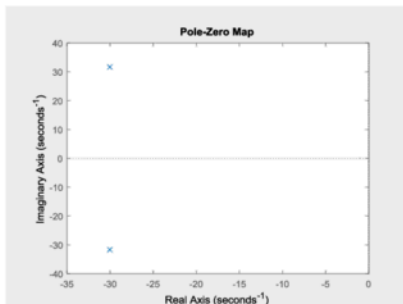
```
clc; clear all;
%Maquina M2
kafi=0.286; J=0.005; Tao_i=2.06e-3; R=0.28; L=0.57e-3;
N=6000; Tn=6.0; KD=Tn/(N*2*pi/60); %KD=Tn/wn;
Jtotal=2*J; Tao_m=Jtotal/KD;
%H(s)=(kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m))/(s^2 + (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m)*s + (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m)))
H = tf([0 0 kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m)], [1 (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m) (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m))]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), %[p,z] = pzmap(sys)
```

```
clc; clear all;
%Maquina M3
kafi=1.09; J=0.014; Tao_i=6.94e-3; R=0.62; L=4.31e-3;
N=3400; Tn=32; KD=Tn/(N*2*pi/60); %KD=Tn/wn;
Jtotal=2*J; Tao_m=Jtotal/KD;
%H(s)=(kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m))/(s^2 + (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m)*s + (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m)))
H = tf([0 0 kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m)], [1 (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m) (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m))]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), %[p,z] = pzmap(sys)
```

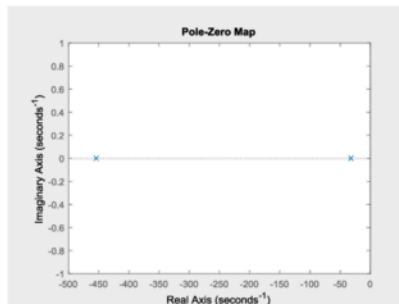
```

clc; clear all;
%Maquina M4
kafi=2.18; J=1.3; Tao_i=24.8e-3; R=0.058; L=1.44e-3;
N=1670; Tn=685; KD=Tn/(N*2*pi/60); %KD=Tn/wn;
Jtotal=2*J; Tao_m=Jtotal/KD;
%H(s)=(kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m))/(s^2 + (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m)*s + (1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m)))
H = tf([0 0 kafi/(R*KD*Tao_i*Tao_m)], [1 (Tao_i+Tao_m)/(Tao_i*Tao_m) 1/(Tao_i*Tao_m) + (kafi)^2/(R*KD*Tao_i*Tao_m)]);
pzmap(H); grid off;
[polos,zeros]=pzmap(H), % [p,z] = pzmap(sys)

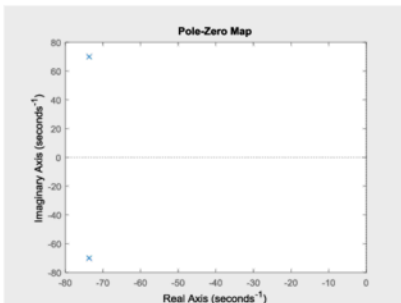
```



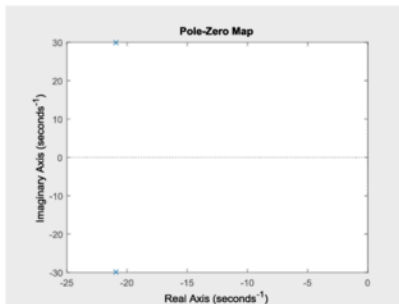
M1: Lugar das raízes.



M2: Lugar das raízes.



M3: Lugar das raízes.



M4: Lugar das raízes.

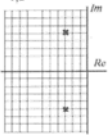
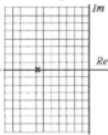
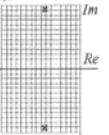
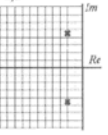
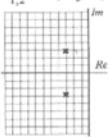
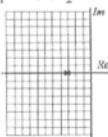
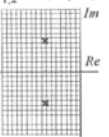
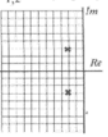
Tabela: Resumo dos pólos e zeros das máquinas M1, M2, M3 e M4.

Máquina M1	Máquina M2	Máquina M3	Máquina M4
polos = -30.0303 +31.6770i -30.0303 -31.6770i	polos = -454.1454 -32.2464	polos = -73.6510 +69.9968i -73.6510 -69.9968i	polos = -20.9145 +29.9011i -20.9145 -29.9011i
zeros = 0	zeros = 0	zeros = 0	zeros = 0

QUADRO 6.1

DADOS NOMINAIS DE VÁRIAS MÁQUINAS DE CORRENTE CONTÍNUA REFERIDAS NO TEXTO E MAPA DE PÓLOS DA SUA FT $\Omega(s)/U(s)$ EM SITUAÇÕES DE VAZIO E DE CARGA. [Dados extraídos de documentação comercial *Siemens*].

Ref. ^a	N_n rpm	T_n Nm	U_n V	I_n A	$K_a\Phi$ rpm	J kg m ²	τ_i (L/R) ms	R ohm	L mH	tipo de excitação
M1	3000	2,2	170	4,7	0,475	0,0012	17,5	3,09	54,1	magnet. perm.
M2	6000	6,0	176	21,3	0,286	0,005	2,06	0,28	0,57	elétrica
M3	3400	32	400	29,4	1,09	0,014	6,94	0,62	4,31	elétrica
M4	1670	685	400	322	2,18	1,3	24,8	0,058	1,44	elétrica

	M1	M2	M3	M4
Pólos da máquina em vazio (apenas com inércia)	$s_{1,2} = -28,6 + j51,6$ 	$s_1 = -67,8; s_2 = -423,5$ 	$s_{1,2} = -71,9 + j120,5$ 	$s_{1,2} = -20,1 + j46,2$ 
Pólos com carga nominal suposta linear do tipo $T_n = K_D \omega_n$ c com $J_{total} = 2J$	$s_{1,2} = -30,0 + j29,0$ 	$s_1 = -31,1; s_2 = -461$ 	$s_{1,2} = -73,5 + j66,6$ 	$s_{1,2} = -20,9 + j28,9$ 

Bibliografia:

Palma, J. (1999), “*Accionamentos Electromecânicos de Velocidade Variável*”, Fundação Calouste Gulbenkian, 1999, ISBN 972-31-0839-9.