

# QUADRO 5.2

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ATÉ À 4ª ORDEM  
SATISFAZENDO O CRITÉRIO ITAE

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA $Y(s)/U(s)$ DE SISTEMAS ÓPTIMOS SEGUNDO O CRITÉRIO ITAE	
para entrada <i>escalon</i>	para entrada <i>rampa</i>
$\frac{\omega_o^2}{s^2 + 1,41\omega_o s + \omega_o^2}$	$\frac{3,2\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + 3,2\omega_o s + \omega_o^2}$
$\frac{\omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 2,15\omega_o^2 s + \omega_o^3}$	$\frac{3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}{s^3 + 1,75\omega_o s^2 + 3,25\omega_o^2 s + \omega_o^3}$
$\frac{\omega_o^4}{s^4 + 2,1\omega_o s^3 + 3,4\omega_o^2 s^2 + 2,7\omega_o^3 s + \omega_o^4}$	$\frac{5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}{s^4 + 2,41\omega_o s^3 + 4,93\omega_o^2 s^2 + 5,14\omega_o^3 s + \omega_o^4}$

## Resolução:

I.

a)

Equação mecânica do sistema obtida por (1).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \quad (1)$$

Em (1)  $T_1$  representa o binário resistente na entrada do redutor visto pelo motor (Figura A).

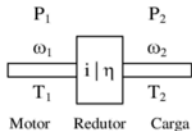


Figura A

Relação entre binários de entrada e saída do redutor (2).

$$\eta_R = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow P_2 = \eta_R P_1 \Leftrightarrow \omega_2 T_2 = \eta_R \omega_1 T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (2)$$

Da equação (2) obtém-se as duas relações (3) e (4).

$$i_R = \frac{T_2}{\eta_R T_1} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \quad (3)$$

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4)$$

Relação entre binário e força do sistema carreto e correia dentada (Figura B) (5).

$$\eta_{FP} = \frac{P_3}{P_2} \Leftrightarrow P_3 = \eta_{FP} P_2 \Leftrightarrow v F = \eta_{FP} \omega_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \Leftrightarrow i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} = \frac{\omega_2}{v} \quad (5)$$

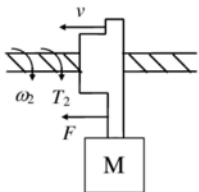


Figura B

Da equação (5) obtém-se as duas relações (6) e (7).

$$i_{FP} = \frac{F}{\eta_{FP} T_2} \rightarrow T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (6)$$

$$i_{FP} = \frac{\omega_2}{v} \quad (7)$$

A força  $F$ , desprezando a massa é obtida por (8).

$$F = k_e x \quad (8)$$

Resolução para controlo de posição  $x$ :

Substituir (8) em (6) para obter (9).

$$T_2 = \frac{F}{\eta_{FP} i_{FP}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP}} \quad (9)$$

Substituir (9) em (3) para obter (10).

$$T_1 = \frac{T_2}{\eta_R i_R} \Leftrightarrow T_1 = \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (10)$$

Substituir (10) em (1) para obter (11).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (11)$$

Resolver (4) em ordem a  $\omega_2$  e substituir em (7). Resolver em ordem a  $\omega_1$  para obter (12).

$$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Leftrightarrow \omega_1 = i_R \omega_2 \xrightarrow[i_{FP} = \frac{\omega_2}{v}]{v} \omega_1 = i_R i_{FP} v \quad (12)$$

Derivar em ordem ao tempo (12) para obter (13).

$$\omega_1 = i_R i_{FP} v \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\omega_1}{dt} = i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

Substituir (12) e (13) em (11) para obter (14).

$$T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + T_1 \Leftrightarrow T_m = J_m \frac{d\omega_1}{dt} + k_{Dm} \omega_1 + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \quad (14)$$

A relação entre a velocidade linear  $v$  com o deslocamento  $x$  é obtida por (15).

$$v = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (15)$$

Substituir (15) em (14) para obter (16).

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{dv}{dt} + k_{Dm} i_R i_{FP} v + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \xrightarrow[\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)]{v = \frac{dx}{dt}}$$

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \Leftrightarrow$$

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}$$

Passar para o domínio da frequência a equação (16) para obter (17).

$$T_m = J_m i_R i_{FP} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{Dm} i_R i_{FP} \frac{dx}{dt} + \frac{k_e x}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \xrightarrow{TL}$$

$$T_m(s) = s^2 J_m i_R i_{FP} X(s) + s k_{Dm} i_R i_{FP} X(s) + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} X(s) \Leftrightarrow$$

$$T_m(s) = \left( s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R} \right) X(s) \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}}$$

Dividir (17) por  $J_m i_R i_{FP}$  para obter (18).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s^2 J_m i_R i_{FP} + s k_{Dm} i_R i_{FP} + \frac{k_e}{\eta_{FP} i_{FP} \eta_R i_R}} \xrightarrow{+J_m i_R i_{FP}} \quad (A)$$

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 \frac{J_m i_R i_{FP}}{J_m i_R i_{FP}} + s \frac{k_{Dm} i_R i_{FP}}{J_m i_R i_{FP}} + \frac{k_e}{J_m i_R i_{FP} \eta_{FP} \eta_R i_R}}} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 + s \frac{k_{Dm}}{J_m} + \frac{k_e}{J_m i_R^2 \eta_{FP}^2 \eta_R}}$$

Diagrama de blocos para um sistema de accionamento para controlo da posição linear  $x$  (Figura C).

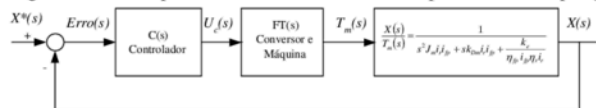


Figura C

- A FT  $U_c(s)/Erro(s)$  representa FT do compensador. A FT do compensador será escolhida de acordo com a ordem da FT dos restantes blocos e da ordem da FT global.
- A FT  $T_m(s)/U_c(s)$  representa a FT com a dinâmica formada/constituída pelo conjunto formado pelo variador electrónico de velocidade, a parte eléctrica do motor eléctrico e o controlo adequado para imposição do binário motor  $T_m$ . Normalmente é considerada uma FT de primeira ordem, caracterizada por um ganho e uma constante de tempo.
- A FT  $X(s)/T_m(s)$  representa a FT calculada na equação (18).

Função de transferência de acordo com o enunciado do problema (19).

$$\frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J_m i_R i_{FP}}}{s^2 + s \frac{k_{Dm}}{J_m} + \frac{k_e}{J_m i_R^2 i_{FP}^2 \eta_{FP} \eta_R}} \rightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{(s+10)(s+100)} \quad (19)$$

Desenvolvendo (19) de forma a ficar compatível com a FT do compensador PID (20).

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{50}{(s+10)(s+100)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{50}{10\left(1+\frac{1}{10}s\right)100\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \\ \frac{X(s)}{T_m(s)} &= \frac{50}{1000\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \Leftrightarrow \frac{X(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{5}{100}}{\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} \end{aligned} \quad (20)$$

Função de Transferência do compensador PID (21).

$$C(s) = \frac{k_c(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{s} \quad (21)$$

De acordo com o enunciado do problema, para que a FT do sistema global seja de segunda ordem, é necessário utilizar os dois zeros do compensador para anular os pólos da FT (20).

$$\tau_1 = \frac{1}{10} \quad (22)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{100} \quad (23)$$

Função de transferência da cadeia de acção do sistema (24).

$$G(s) = \frac{k_c}{s} \times \frac{k_e}{1+s\tau_e} \times \frac{5}{1} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100}}{s(1+s\tau_e)} = \frac{5k_c k_e}{100s(1+s\tau_e)} \quad (24)$$

Função de transferência global do sistema em cadeia fechada obtida com (25).

$$\begin{aligned}
 FT_{CF} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}}{1 + \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)}} = \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e)} \times \frac{100s(1 + s\tau_e)}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \\
 &= \frac{5k_c k_e}{100s(1 + s\tau_e) + 5k_c k_e} = \frac{5k_c k_e}{s^2 100\tau_e + 100s + 5k_c k_e} = \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{\frac{s^2 100\tau_e}{100\tau_e} + \frac{100s}{100\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}} \Leftrightarrow \\
 FT_{CF} &= \frac{\frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}{s^2 + s\frac{1}{\tau_e} + \frac{5k_c k_e}{100\tau_e}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Para dimensionar  $k_c$  (27) aplica-se o critério do ITAE 2ª ordem [Palma 1999; Quadro 5.2, pp. 214]

(26) com um factor de amortecimento de  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{26}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2\xi\omega_n &= \frac{1}{\tau_e} \\ \omega_n^2 &= \frac{5k_c k_e}{100\tau_e} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{2\xi\tau_e} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_e} \\ \frac{1}{2\tau_e^2} &= \frac{5k_c k_e}{100\tau_e} \Leftrightarrow k_c = \frac{100}{2 \times 5k_e \tau_e} \Leftrightarrow k_c = \frac{100}{2 \times 5 \times 10 \times 1 \times 10^{-3}} = 1000 \end{aligned} \right. \tag{27}$$

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27

## Problema 8

Uma máquina assíncrona trifásica de rotor em curto-circuito possui as seguintes características: Velocidade de sincronismo 1500rpm; Potência nominal 25kW; Tensão nominal 380V; escorregamento nominal 3%; frequência nominal 50Hz; corrente de vazio  $0,4I_n$ .

a) Com a máquina ligada à rede determine a potência desenvolvida pela máquina na situação de escorregamento  $s=1,5\%$ .

b) Considere a máquina alimentada por um ondulador de tensão que impõe a frequência de 40Hz. Sabendo que a corrente de vazio se mantém praticamente no valor  $0,4I_n$ , calcule: O valor da tensão composta aplicada à máquina e a potência desenvolvida com  $s=1,5\%$ .

### P8 Resolução:

a) Com a máquina ligada à rede determine a potência desenvolvida pela máquina na situação de  $s=1,5\%$ .

Com a máquina ligada à rede as condições de alimentação são as nominais, 380V e 50Hz, e a máquina está a funcionar na característica nominal.

Representação gráfica do ponto de funcionamento nominal, considerando-a linear para valores de binário inferiores ao do nominal, conforme Figura A.

O funcionamento em regime estacionário e obtenção da característica electromecânica foi analisado na secção 3.2.4, páginas 87-103 [Palma, 1999].

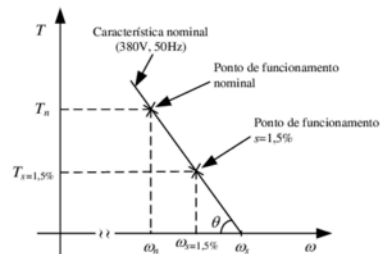


Figura A

Determinação do ponto de funcionamento nominal

O escorregamento e a relação entre velocidades  $\omega_s$  e  $\omega_r$  é obtido com (1).

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Leftrightarrow \omega_s - \omega = s\omega_s \Leftrightarrow \omega_s - s\omega_s = \omega \Leftrightarrow (1-s)\omega_s = \omega \Leftrightarrow \omega = \omega_s(1-s) \quad (1)$$

Conversão entre unidades ( $\text{rads}^{-1}$  e rpm) de velocidade angular obtida por (2).

$$\omega[\text{rads}^{-1}] = N[\text{rpm}] \times \frac{2\pi}{60} \quad N[\text{rpm}] = \omega[\text{rads}^{-1}] \times \frac{60}{2\pi} \quad (2)$$

Cálculo da velocidade angular de sincronismo  $\omega_s$  obtida por (3).

$$\omega_s[\text{rads}^{-1}] = N[\text{rpm}] \times \frac{2\pi}{60} \Leftrightarrow \omega_s = 1500 \times \frac{2\pi}{60} \Leftrightarrow \omega_s \approx 157 \text{rads}^{-1} \quad (3)$$

Cálculo da velocidade nominal ( $\omega_n$  e  $N_n$ ), para  $s=3\%$ , calculada com (4).

$$\omega_n = \omega_{s=3\%} = \omega_s (1-s) = 1500 \times \frac{2\pi}{60} \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) \Leftrightarrow \omega_n = 152,3 \text{ rad s}^{-1} \xrightarrow{\times \frac{60}{2\pi}} N_n = 1455 \text{ rpm} \quad (4)$$

Cálculo do binário nominal  $T_n$  (5) com a potência nominal  $P_n$  (enunciado do problema) e velocidade nominal  $\omega_n$  calculada em (4).

$$P_n = T_n \omega_n \Leftrightarrow T_n = \frac{P_n}{\omega_n} \Leftrightarrow T_n = \frac{25 \times 10^3}{152,3} \Leftrightarrow T_n = 164,1 \text{ Nm} \quad (5)$$

Determinação da potência para  $s=1,5\%$ , considerando a característica nominal (Figura A).

Cálculo da velocidade para um escorregamento de  $1,5\%$  (6).

$$\omega_{s=1,5\%} = \omega_s (1-s) = 1500 \times \frac{2\pi}{60} \times \left(1 - \frac{1,5}{100}\right) \Leftrightarrow \omega_{s=1,5\%} = 154,7 \text{ rad s}^{-1} \xrightarrow{\times \frac{60}{2\pi}} N_{s=1,5\%} = 1477,5 \text{ rpm} \quad (6)$$

Cálculo do binário  $T_{s=1,5\%}$  (Figura A) desenvolvido para  $s=1,5\%$  (7).

$$\text{tg}(\theta) = \frac{T_n}{\omega_s - \omega_n} = \frac{T_{s=1,5\%}}{\omega_s - \omega_{s=1,5\%}} \quad (7)$$

Desenvolver (7) para obter  $T_{s=1,5\%}$  com (8).

$$\frac{T_n}{\omega_s - \omega_n} = \frac{T_{s=1,5\%}}{\omega_s - \omega_{s=1,5\%}} \Leftrightarrow T_{s=1,5\%} = \frac{\omega_s - \omega_{s=1,5\%}}{\omega_s - \omega_n} T_n \Leftrightarrow T_{s=1,5\%} = \frac{157 - 154,7}{157 - 152,3} T_n \Leftrightarrow \quad (8)$$

$$T_{s=1,5\%} = 0,5 T_n \Leftrightarrow T_{s=1,5\%} = 0,5 \times 164,1 \Leftrightarrow T_{s=1,5\%} = 82 \text{ Nm}$$

Potência para  $s=1,5\%$  com (8) e (6) para obter (9).

$$P_{s=1,5\%} = T_{s=1,5\%} \omega_{s=1,5\%} \Leftrightarrow P_{s=1,5\%} = 82 \times 154,7 \Leftrightarrow P_{s=1,5\%} = 12,7 \text{ kW} \quad (9)$$

A Figura A.1 representa graficamente a solução determinada anteriormente.

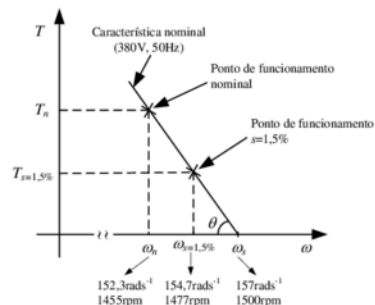


Figura A1

**b) Considere a máquina alimentada por um ondulator de tensão que impõe a frequência de 40Hz. Sabendo que a corrente de vazio se mantém praticamente no valor  $0,4I_n$ , calcule: O valor da tensão composta aplicada à máquina e a potência desenvolvida com  $s=1,5\%$ .**

Considerando que a máquina é alimentada por um ondulator de tensão e sabendo que a corrente de vazio  $I_o$  é aproximadamente constante, significa que a máquina é alimentada utilizando a técnica  $V/f$ .

Uma vez que a frequência de alimentação é 40Hz, significa que a máquina está a funcionar numa característica diferente da nominal. Uma vez que se utiliza a técnica  $V/f$ , consideram-se as características aproximadamente paralelas (Figura B).

Representação gráfica do novo ponto de funcionamento ( $T', \omega'$ ) de acordo com a Figura B.

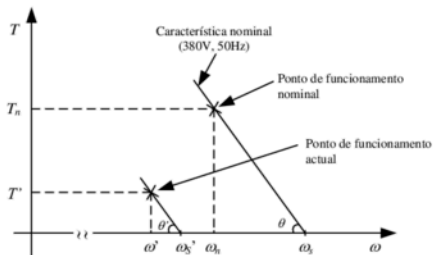


Figura B

Cálculo da tensão  $V'$  de alimentação considerando a técnica  $V/f$  (10).

$$\frac{V_n}{f_n} = \frac{V'}{f'} \Leftrightarrow V' = f' \frac{V_n}{f_n} \Leftrightarrow V' = 40 \times \frac{380}{50} \Leftrightarrow V' = 304V \quad (10)$$

Determinação do novo ponto de funcionamento.

Uma vez que as características são aproximadamente paralelas (Figura B) verifica-se (11).

$$\operatorname{tg}(\theta') = \operatorname{tg}(\theta) \Leftrightarrow \frac{T'}{\omega_s' - \omega'} = \frac{T_n}{\omega_s - \omega_n} \quad (11)$$

Resolvendo (11) em ordem a  $T'$  obtém-se (12).

$$\frac{T'}{\omega_s' - \omega'} = \frac{T_n}{\omega_s - \omega_n} \Leftrightarrow T' = \frac{\omega_s' - \omega'}{\omega_s - \omega_n} T_n \quad (12)$$

Cálculo da velocidade angular de sincronismo para a frequência imposta pelo ondulator de tensão ( $f' = 40\text{Hz}$ ) (13) e (14).

$$\omega_s' = \frac{2\pi f'}{n_{pp}} \Leftrightarrow \omega_s' = \frac{2\pi \times 40}{2} \Leftrightarrow \omega_s' = 125,6 \text{ rad s}^{-1} \xrightarrow{\times \frac{60}{2\pi}} N_s' = 1200 \text{ rpm} \quad (13)$$

$$\omega' = \omega_{s=1,5\%} \Leftrightarrow \omega' = \omega_s' (1 - s) = 125,6 \times \left(1 - \frac{1,5}{100}\right) \times \omega' \Leftrightarrow \omega' = 123,7 \text{ rad s}^{-1} \xrightarrow{\times \frac{60}{2\pi}} N' = 1182 \text{ rpm} \quad (14)$$