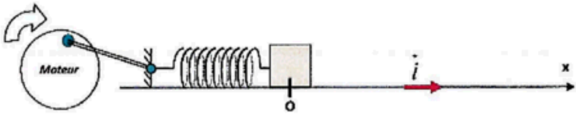
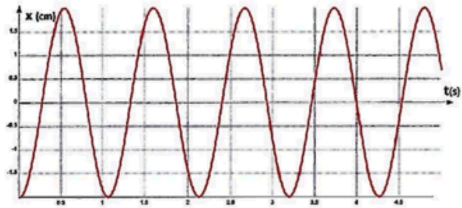
Ex 3) = Oscillations entretenues par un moteur =

Un moteur extérieur impose à un système solide-ressort horizontal d'osciller sinusoïdalement, à une fréquence imposée par le moteur. Le ressort est supposé idéal, et a une constante de raideur k. Le solide, de masse m = 100 g peut glisser sans frottement sur un axe horizontal.

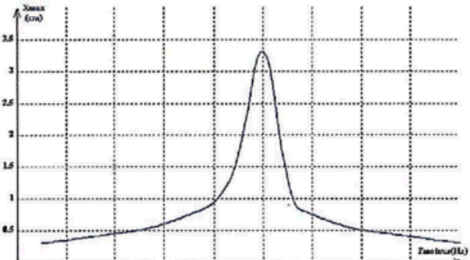


1° - La position x(t) du solide est donnée par le graphe ci-dessous :



En déduire la vitesse de rotation du moteur.

2° - Lorsque l'on fait varier cette vitesse de rotation on obtient une variation de l'amplitude des oscillations représentée ci-dessous.



a - Quel phénomène ce graphe met-il en évidence ?

b - En déduire la fréquence d'oscillation propre au système, puis la valeur de la raideur k du ressort.

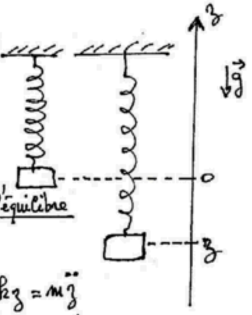
==================

Chap VI Systèmes Oscillants : Corrections

Ex 1 : Masse suspendue à un ressort

1° Constante de raideur :

$$k = \frac{P}{x} = \frac{mg}{\ell - \ell_0} = \frac{0,15 \times 9,81}{0,04} = \underline{36,8\ N/m}$$



2° a. Équation du mouvement.

A l'équilibre $\vec{T_0} + \vec{P} = 0$

D'où le fait de ne plus considérer que le surcroît de Tension $\vec{T}$:

$\vec{T} \begin{vmatrix} 0 \\ -kz \end{vmatrix} \quad \vec{a} \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$

La 2° Loi de Newton impose : $\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kz = m\ddot{z}$

$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$ soit avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la pulsation propre,

l'équation : $\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0}$

b. Caractéristiques des oscillations :

La solution de l'équation est : $z(t) = z_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$

→ Période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0 = 2\pi . \sqrt{\frac{0,15}{36,8}} = \underline{0,4\ s}$

→ Phase à l'origine : Le système est lâché sans vitesse initiale

d'où : $v = \dot{z} \Rightarrow v(t=0) = \dot{z}(0) = 0$

avec : $z = z_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{z} = -\omega_0 z_{max} . \sin(\omega_0 t + \varphi)$

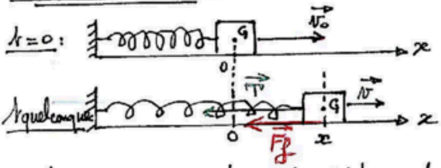
d'où : $\dot{z}(0) = -\omega_0 z_{max} \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \underline{\varphi = 0}$

soit $z(t) = z_{max} . \cos(\omega_0 t)$

→ Amplitude : à $t=0$ $z = -3cm$ d'où : $\underline{z(0) = z_{max} = -3cm}$

Finalement : $\boxed{z(t) = -0,03 . \cos(15,66 t)}$

Ex 2 = Oscillations amorties =



1° - Equation du mouvement avec la résistance de l'air =

* Bilan des forces : $\vec{T}\begin{vmatrix} -kx \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{F_f}\begin{vmatrix} -Cv = -C\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$

* Accélération = $\vec{a}\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$

* 2° Loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - C\dot{x} = m\ddot{x}$

* Equation du mouvement = $m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On pose : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (pulsation propre du système) et $\beta = \frac{c}{2m}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

* Période des oscillations amorties = $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

soit : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,35}{10}} = \underline{1,18\,s}$

2° - On néglige la résistance de l'air =

* Equation : $\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ = oscillateur non-amorti.

* Solution = $\boxed{x(t) = x_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

* Phase à l'origine =

à $t = 0$: $x(t=0) = 0$

avec $x(t=0) = x_{max} \cdot \cos\varphi = 0$ et $x_{max} \neq 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0$

soit $\varphi = \pm \pi/2$

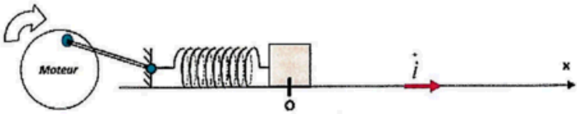
* Pulsation = $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{1,18} = \underline{5,35\,rad/s}$

* Amplitude = $x = x_{max} \cdot \cos(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \dot{x} = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

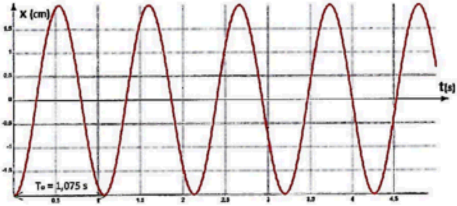
or $\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow \pm\omega_0 x_{max} = v_0 \Rightarrow x_{max} = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{2}{5,35} = \underline{0,374\,m}$

* Conclusion :
Soit : $\boxed{x(t) = 0,374 \cdot \cos\left(5,35\,t - \frac{\pi}{2}\right)}$

Ex 3 : Oscillations entretenues :



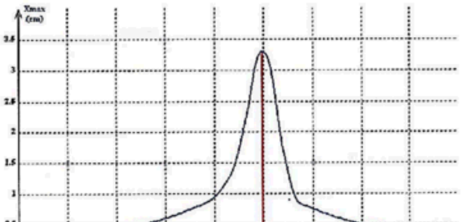
1° - Vitesse de rotation du moteur :



To = 1,075 s (mesuré sur le graphe) $\Rightarrow \quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{1{,}075} = 5{,}85\,\text{rad/s}$

soit : $\underline{\omega_0 = 55{,}8\,\text{tours/min}}$

2° - Variations du régime moteur.



a - Lorsque la fréquence du moteur correspond à la fréquence propre du système on a un pic d'amplitude : c'est la **résonance**.

b - Fréquence d'oscillation propre au système : on lit sur le graphe que le pic d'amplitude est pour **Fo = F ≈ 1 Hz.**

- Raideur du ressort : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ donne $k = m\,\omega_0^2 = 0{,}1 \times 3115{,}2 = \underline{311{,}52\,\text{N/m}}$

==================