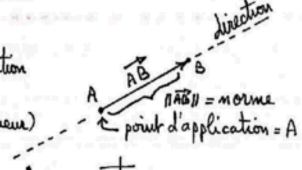
# - chap I - Cinématique -

## I - Notion de vecteur =

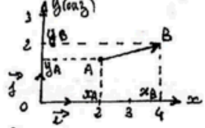
### 1° - Définition =

Un vecteur a :
- un point d'application
- une direction
- un sens
- une norme (longueur)




### 2° - Composantes =

En 2 dimensions $(x,y)$ ou $(x,z)$ un vecteur a 2 composantes :




* Repère = Pour définir un vecteur on a besoin d'un repère, c'est-à-dire d'une origine notée O et de 2 vecteurs unitaires de base (de longueur unité) généralement notés $\vec{i}$ et $\vec{j}$. La base est alors $B = (\vec{i}, \vec{j})$

Le repère est alors : $\boxed{R = (O; \vec{i}; \vec{j})}$

* Exemple =

Dans l'exemple ci-dessus on a :

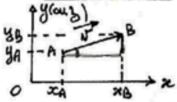
$$\vec{AB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A = 4 - 2 = 2 \\ y_B - y_A = 2 - 1,5 = 0,5 \end{vmatrix} \quad \text{d'où : } \vec{AB} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

où 2 et $\frac{1}{2}$ sont les composantes de $\vec{AB}$ dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On écrira alors : $\vec{AB} = 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

### 3° - Norme d'un vecteur :

On applique le théorème de Pythagore :

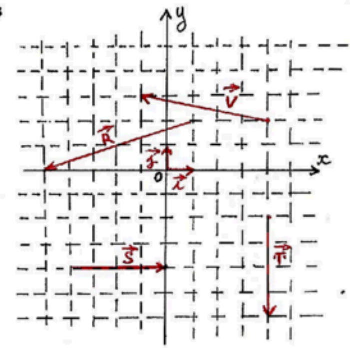



Les composantes du vecteur sont $\vec{AB} = \vec{v} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix}$

alors : $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

---

Ex1 :




Donner les coordonnées, et la norme des vecteurs $\vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$ et $\vec{V}$

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} R_x = 5 - 1 = -6 \\ R_y = 0 - 2 = -2 \end{vmatrix} \text{ et } \|\vec{R}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

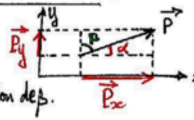
$$\vec{S} = \begin{vmatrix} S_x = 0 + 4 = 4 \\ S_y = -4 + 4 = 0 \end{vmatrix} \text{ et } \|\vec{S}\| = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} T_x = 4 - 4 = 0 \\ T_y = -6 + 2 = -4 \end{vmatrix} \text{ et } \|\vec{T}\| = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} V_x = -1 - 4 = -5 \\ V_y = 3 - 2 = 1 \end{vmatrix} \text{ et } \|\vec{V}\| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$$

## 4°- Composantes d'un vecteur quand on connaît l'angle avec les axes =

→ Si on donne $\alpha$ : $\vec{P}\left|\begin{array}{l}P_x = P.\cos\alpha \\ P_y = P.\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \vec{P} = \left|\begin{array}{l}P\cos\alpha \\ P\sin\alpha\end{array}\right.$



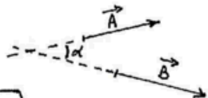

→ Si on donne $\beta$ : donner les composantes de $\vec{P}$ en fonction de $\beta$.

## 5°- Produit Scalaire =

→ Les composantes sont connues = $\vec{A}\left|\begin{array}{l}A_x \\ A_y\end{array}\right.$ et $\vec{B}\left|\begin{array}{l}B_x \\ B_y\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y}$

→ On connaît l'angle entre les 2 vecteurs =

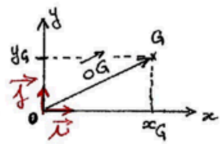
$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos\alpha$$




# II - Application des vecteurs à la cinématique =

## 1°- Le vecteur position =

On définit le vecteur position d'un objet par rapport à l'origine de la base choisie $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en prenant le centre de gravité G de l'objet.

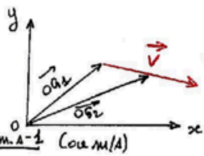



$\boxed{\text{Vecteur position} = \vec{OG}\left|\begin{array}{l}x_G \\ y_G\end{array}\right.}$ si l'objet bouge au cours du temps : $\vec{OG} = \left|\begin{array}{l}x_G(t) \\ y_G(t)\end{array}\right.$

## 2°- Le vecteur vitesse =

* Définition = La vitesse, c'est la variation de la position au cours du temps.

C'est donc la dérivée du vecteur $\vec{OG}$ en fonction du temps, que l'on note : $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}}$ en m.s-1 (ou m/s)

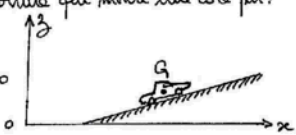



* Dans le cas du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ = Dériver le vecteur $\vec{OG}$ revient à dériver ses composantes : $\vec{OG} = \left|\begin{array}{l}x(t) \\ y(t)\end{array}\right. \Rightarrow \vec{v} = \left|\begin{array}{l}\frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\dot{x} \\ \dot{y}\end{array}\right.$

* ex : On définit la position d'une voiture qui monte une côte par :

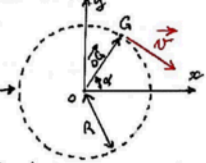
$$\vec{OG} = \left|\begin{array}{l}x(t) = 2t^2 + 10 \\ z(t) = 2t\end{array}\right.$$

1°- Quelle est la position de la voiture à t = 0
2°- Définir le vecteur vitesse $\vec{v}$.
3°- Quelle est la valeur de la vitesse à t = 2s ?



* Tracer le vecteur vitesse $\vec{v}$ :

- Le point d'application est le centre G de l'objet en mouvement,
- La direction est celle du mouvement, elle est tangente à la trajectoire,
- Le sens est celui du mouvement,
- La longueur du vecteur $\vec{v}$ est proportionnelle à sa norme $\|\vec{v}\|$.




exemple : La rotation circulaire à vitesse constante.

La position du mobile varie (il se déplace sur un cercle) d'où :

$$\vec{OG} = \begin{vmatrix} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} = -R\sin\alpha.\dot{\alpha} \\ \dot{y} = R\cos\alpha.\dot{\alpha} \end{vmatrix}$$

car $R = $ cte (rayon du cercle) mais $\alpha$ est une fonction du temps ($\alpha = \alpha(t)$).

On a donc : $\vec{v} = R(-\sin\alpha.\vec{i} + \cos\alpha.\vec{j})$ fonction du temps.

Mais on a bien $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{R^2.\sin^2\alpha\dot{\alpha}^2 + R^2.\cos^2\alpha\dot{\alpha}^2} = R\dot{\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

soit : $v = R\dot{\alpha}$ ; avec $\omega = \dot{\alpha}$ = vitesse de rotation en $rad.s^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{v = R\omega = \text{cte}}$ si la vitesse de rotation est constante.

3°- Le vecteur accélération :

* Définition : L'accélération, c'est la variation de la vitesse au cours du temps.

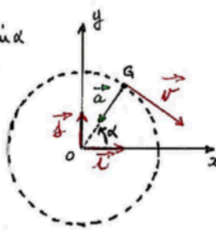
Soit : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$ en $m.s^{-2}$

* Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ : $\vec{OG} = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix}}$

* ex : Reprenons le cas de la voiture qui monte une côte : $\vec{OG} = \begin{vmatrix} 2t^2+10 \\ 2t \end{vmatrix}$

Donner l'expression $\vec{a}$ de l'accélération, et sa valeur numérique a.

* Cas de la rotation circulaire à vitesse constante :




On avait calculé que $\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} = -R\dot{\alpha}\sin\alpha = -R\omega\sin\alpha \\ \dot{y} = R\dot{\alpha}\cos\alpha = R\omega\cos\alpha \end{vmatrix}$

on a donc : $\vec{a} = \begin{vmatrix} -R\omega\dot{\alpha}\cos\alpha = -R\omega^2\cos\alpha \\ -R\omega\dot{\alpha}\sin\alpha = -R\omega^2\sin\alpha \end{vmatrix}$

Soit : $\vec{a} = -R\omega^2.(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$

$\Rightarrow \|\vec{a}\| = R\omega^2.\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = R\omega^2$

soit : $\boxed{a = R\omega^2}$ = cte puisque $\omega = $ cte

⚠ La vitesse est constante, mais pas le vecteur vitesse $\vec{v}$, puisque la direction de $\vec{v}$ varie ; on a donc une variation de $\vec{v}$, ce qui implique une accélération non nulle. On l'appelle accélération centripète.

## 4°- Relation importante dans le cas d'un mouvement circulaire :

→ Circulaire uniforme : on a vu que $v = R\omega$ et $a = R\omega^2$, d'où : $\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$

D'où l'on déduit que plus le rayon est petit, pour une même vitesse $v$, plus l'accélération est importante. On sait bien que plus un virage est "serré", plus on va solliciter les pneus pour rester sur la route.

→ Circulaire accéléré : La relation précédente ne concerne que l'accélération centripète et pas l'accélération globale.

---

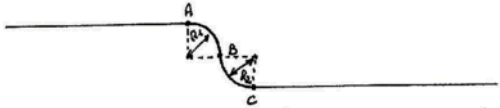
**ex 2** = Mouvement circulaire accéléré :

Soit $\vec{OQ} = \begin{vmatrix} x = R\cos(3t) \\ y = R.\sin(3t) \end{vmatrix}$ (Remarque : ici 3 est la vitesse de rotation en degré/seconde)

1°- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$, puis sa norme $v$.
2°- Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$, puis sa norme $a$.
3°- Représenter ces vecteurs sur un schéma pour $t = 15\,s$ et $R = 1$.

**ex 3** = Accélération dans une "chicane" :

Un mobile se déplace sur deux lignes droites raccordées par deux quarts de cercle de Rayon différents $R_1$ de A à B et $R_2$ de B à C.




Si le mobile se déplace à vitesse constante, précisez l'accélération :

→ avant A
→ entre A et B
→ entre B et C
→ après C.

Application numérique : $v = 40\ km/h$ ; $R_1 = 35\,m$ ; $R_2 = 40\,m$
(Attention aux unités)

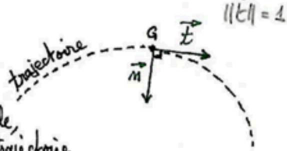
---

# III - Le Repère de Frenet :

1°- Définition : Jusqu'à présent on a utilisé un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$
→ O point fixe
→ $\vec{i}$ = vecteur unitaire fixe
→ $\vec{j}$ = vecteur unitaire fixe.

Mais il existe des repères qui se déplacent avec le mobile, en particulier le repère de FRENET, particulièrement bien adapté aux trajectoires courbes.

* Le repère de FRENET en 2 dimensions =

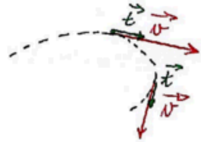



Le repère de Frenet en 2 dimensions $(G, \vec{t}, \vec{n})$ est constitué :

→ d'une origine G qui est le centre du mobile,
→ d'un vecteur unitaire $\vec{t}$ tangent à la trajectoire,
→ d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal (perpendiculaire) à la trajectoire.

2°. La vitesse dans le repère de Frenet =

* Position du point G :




L'arc de courbe parcouru par G depuis $t=0$ est noté $s$ = abscisse curviligne
La variation infinitésimale de $s$ est notée $ds$.

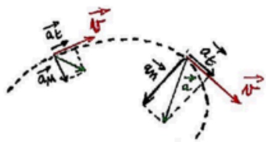
* Vitesse de G dans le repère :

La vitesse étant la variation de la position au cours du temps on a : $v = \dfrac{ds}{dt}$

Et comme la vitesse est tangente à la trajectoire, on a : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}.\vec{t}}$

3°. L'accélération dans le repère de Frenet =

Elle se décompose en une composante tangentielle qui est l'accélération sur la trajectoire, et en une accélération normale due à la courbure de la trajectoire (accélération centripète).

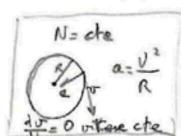



→ Accélération tangentielle :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \vec{a}_t = \frac{d^2v}{dt^2}.\vec{t}$$

→ Accélération normale =

C'est celle qui a été vue dans le cas du mouvement circulaire : $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

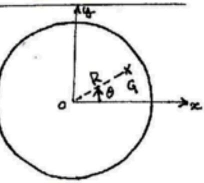



→ Accélération totale = $\boxed{\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}.\vec{t} + \dfrac{v^2}{R}.\vec{n}}$

4°. Notion de rayon de courbure R =


En tout point de la trajectoire on peut définir un cercle de rayon R tangent à la trajectoire. La variation infinitésimale de la position du mobile est en ce point : $ds = R.d\theta$
d'où une vitesse : $v = \dfrac{ds}{dt} = R.\dfrac{d\theta}{dt} = R\omega$ où $\omega$ est la vitesse de rotation (en rad/s)

**Ex 4 - La carousel -**




Un manège est un plateau tournant autour d'un axe figuré sur le schéma par un point O. On considérera, sur ce manège, le mouvement d'un cheval de bois noté G, placé à 3 m du centre. Au départ la position $\vec{OG}$ du cheval de bois fait un angle $\theta_0$ avec l'axe Ox.

Quand le manège se met en mouvement l'angle $\theta$ varie selon la loi :

$$\theta(t) = \frac{5t^2}{6} + t + \theta_0$$

On étudiera le mouvement du cheval de bois pendant la phase d'accélération du manège.

1° - Déterminer la vitesse de rotation $\omega$ du manège.

2° - En déduire la vitesse du cheval de bois.

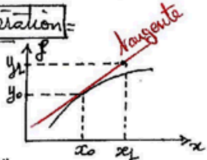
3° - Déterminer l'accélération $\vec{a}$ du cheval de bois.

4° - Par sécurité on ne veut pas que l'accélération dépasse 3g soit 30 m.s$^{-2}$.
Au bout de combien de temps doit-on stabiliser la vitesse de rotation $\omega$ ?

---

## IV - Détermination graphique de la vitesse et de l'accélération -

**1° - Principe -** La dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point $x_0$ est la pente de la courbe de f en ce point, soit la pente de la tangente à la courbe en ce point.



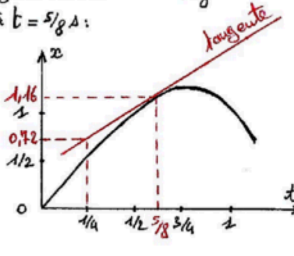

Soit sur l'exemple ci-contre : $f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

**2° - Application à la vitesse -** Soit $\vec{OG} = \begin{vmatrix} x(t) = -2t^2 + 3t \\ y(t) = -5t + 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix}$

Traçons $x(t)$ pour déterminer $v_x$ à $t = 5/8$ s :

on a donc : $v(x = 5/8) = \frac{1{,}16 - 0{,}72}{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}}$

$v_x = 1{,}17$ m.s$^{-2}$




**3° - Application à l'accélération -**

De la même façon que précédemment $a_x$ est donnée par la pente de la courbe $v_x(t)$.

**Ex 5 = Accélération d'une voiture :**

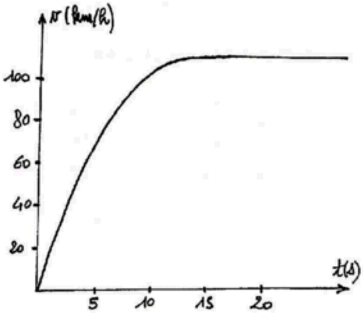
Le graphique ci-contre représente la vitesse $v$ du centre d'inertie d'une voiture sur une route rectiligne.

1°- Décrire comment varie la vitesse au cours du mouvement.

2°- a- Définir l'accélération de la voiture.

b- Comment déterminer l'accélération à partir de la courbe.

c- Calculer l'accélération aux instants $t = 1s$ et $t = 8s$.

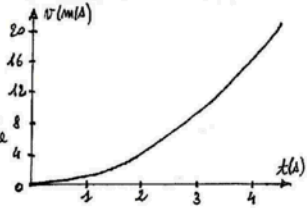



**Ex 6 =** Le graphique ci-contre est celui de la vitesse d'un mobile.

a- Déterminer son accélération moyenne entre 0 et 3,5s.

b- Déterminer son accélération instantanée à $t = 2s$.

c- Déterminer le déplacement effectué par le mobile entre $t = 2s$ et $t = 4s$.




---

## V- Exercices =

**1°- Exercice 7 =**

a- Une voiture évolue sur une route horizontale. Elle démarre à la date $t = 0\,s$ et accélère jusqu'à atteindre la vitesse de 70 km/h au bout de $\Delta t = 10s$. Durant cette première phase, son mouvement est rectiligne et son accélération est constante.

Calculer l'accélération de la voiture durant cette première phase.

b- La voiture aborde ensuite un virage en arc de cercle de rayon $R = 100m$. La vitesse de la voiture reste constante à 70 km/h.

Calculer l'accélération de la voiture dans le virage.

**2°- Exercice 8 =** Un camion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V_c$. Dans la remorque un individu lance un projectile animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans la direction de déplacement du camion, avec une vitesse $V_r$ par rapport au camion.

Quelle est la vitesse du projectile par rapport à la Terre ?

**3°- Exercice 9 =** Un disque 45 tours (45 tours par minute) a un diamètre $d = 17cm$.

a- Calculer la vitesse angulaire du disque.

b- Calculer la vitesse d'un point au bord du disque et représenter le vecteur $\vec{v}$.

c- Calculer la longueur de la trajectoire parcourue par ce point en 10s.

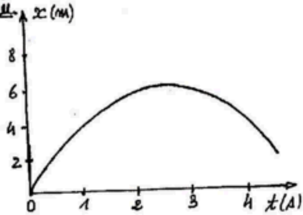
4° **Exercice 10 = Vitesse moyenne et instantanée.**

Le graphique ci-contre représente la position d'un mobile au cours du temps.

a. Déterminez la vitesse moyenne du mobile entre $t = 0\,s$ et $t = 3,5\,s$.

b. Déterminez la vitesse instantanée à $t = 2\,s$.

c. Déterminez la vitesse instantanée à $t = 4\,s$.



# Chap I = Exercices de Cinématique -

**Exercice 1** = Une automobile parcourt une portion de route - Les coordonnées $x$ et $z$ du centre d'inertie G de la voiture sont, au cours du temps données par

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 + 10 \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

1°- Quelle est la position de la voiture à l'instant $t = 0$ ?

2°- a- Donner les coordonnées de la vitesse en fonction du temps -

b- En déduire l'expression la vitesse en fonction du temps -

c- Quelle est la vitesse de la voiture à $t = 2s$ ?

3°- a- Donner les coordonnées de l'accélération en fonction du temps.

b- En déduire l'expression de l'accélération en fonction du temps -

4°- Tracer la trajectoire de l'automobile -

---

**Exercice 2** = Le graphique ci-dessous montre l'évolution de la vitesse d'une voiture sur une route rectiligne.

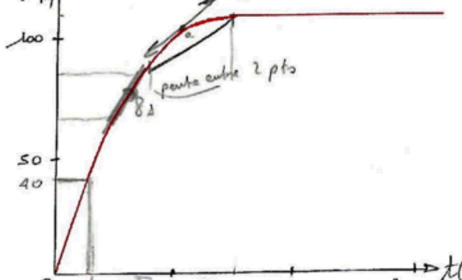
1°- Décrire l'évolution de la vitesse au cours du mouvement -

2° a- Définir l'accélération instantanée du centre d'inertie de la voiture.

b- Comment peut-on calculer l'accélération à partir de la courbe ?

c- Dans quels intervalles de temps l'accélération est-elle constante ?

d- Quelles sont les accélérations aux dates $t = 1s$ et $t = 8s$ ?



## Exercice 3 :

On donne les coordonnées de la vitesse d'un système physique :

$$\vec{OG}\begin{cases} x = 4t + ct_1 \\ y = -\frac{3}{2}t^2 + ct_2 \end{cases} \xleftarrow{\text{intégrer}} \vec{v}_G(t) = \begin{cases} v_x(t) = 4 \\ v_y(t) = -3t \end{cases} \xrightarrow{\text{dériv}} \vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0\ m.s^{-2} \\ a_y = -3\ m.s^{-2} \end{cases} \vec{a}_G(t)$$

1°- Position $\vec{OG}(t)$ et accélération $\vec{a}_G(t)$ à déterminer.
Que manque-t-il pour déterminer précisément $\vec{OG}(t)$ ? Cte d'intégration que l'on ne connait pas

2°- On suppose qu'à $t = 0$ on a $\vec{OG}(t=0) = \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
Déterminez alors $\vec{OG}(t)$ complètement.

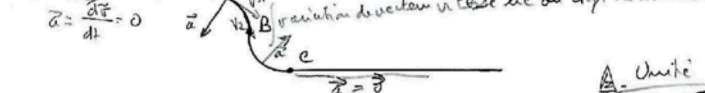
$$\vec{OG}(t=0) = \begin{cases} x(t=0) = ct_1 = 0 \\ y(t=0) = ct_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -\frac{3}{2}t^2 + 1 \end{cases}$$

---

## Exercice 4 :

Préciser l'accélération subie par un mobile se déplaçant à vitesse $v$ constante sur une trajectoire formée de 2 segments rectilignes raccordés par 2 quarts de cercles de même rayon R. A.N. : $V = 72 km.h^{-1}$ et $R = 20m$.

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} = \frac{(72000/3600)^2}{20} = \frac{20^2}{20} = 20\ m.s^{-2}$$




⚠ Unité
1 tour/min = $\frac{2\pi}{60}$

---

## Exercice 5 :


Un plateau de rayon R et de centre O tourne autour de ce centre. On mesure sa rotation avec l'angle θ que fait un point fixe du bord du plateau, noté M, avec l'axe Ox d'un repère fixe (O, x, y).
Avant d'atteindre une vitesse de rotation constante, la rotation est accélérée selon : $\theta(t) = 8t^2 + 5t$

1°- Donner la vitesse de rotation $\omega(t)$. $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 16t + 5$ (rad.s-1)

2°- En déduire l'accélération angulaire α au cours de cette phase d'accélération.
Comment peut on qualifier le mouvement au cours de cette phase. accel cte

3°- Déterminer la vitesse du point M au cours du temps. $\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = 16 rad.s^{-2}$
A.N. : R = 3m
$v = R.d\theta = 3 \times (16t + 5) = 48t + 15$

4°- Déterminer l'accélération de M.

$$a = \frac{d\omega}{dt} = 3 \times 16 = 48$$

**Exercice 6** – Composition des mouvements =

Un camion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, de vitesse $\vec{v_e}$.
Dans la remorque, un individu lance un projectile animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans la même direction que celle du camion. On note $\vec{v_r}$ la vitesse du projectile par rapport au camion.
Etablir une relation entre les vecteurs $\vec{v_a}, \vec{v_r}, \vec{v_e}$ où $\vec{v_a}$ est la vitesse du projectile par rapport à la Terre.

---

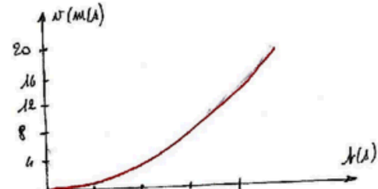
**Exercice 7** –

a. Une voiture évolue sur une route horizontale. Elle démarre à la date $t = 0s$ et accélère jusqu'à atteindre la vitesse de 70km/h au bout de $\Delta t = 10s$. Durant cette première phase, son mouvement est rectiligne et son accélération est constante. Calculer cette accélération.

b. La voiture aborde ensuite un virage en arc de cercle de rayon $R = 100m$. La vitesse de la voiture est alors constante à 70 km/h.
Calculer l'accélération dans le virage.

---

**Exercice 8** =




Le graphe ci-contre est celui de la vitesse d'un mobile au cours du temps.

a. Déterminer son accélération moyenne entre 0 et 3,5s.

b. Déterminer son accélération instantanée à $t = 2s$.

c. Déterminer le déplacement effectué par le mobile entre $t = 2s$ et $t = 4s$, si l'on considère qu'à $t = 0$ on est au point de départ $x = 0$.

---

# – Corrigé des exercices de Cinétique –

**Exercice 1** :

Vecteur Position $\vec{OG}$

1°_ Position de la voiture à $t=0$ : $\vec{OG}\begin{cases} x(t) = 2t^2+10 \\ z(t) = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = 10 \\ z(t=0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{OG} = \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \end{vmatrix}$

Vecteur vitesse $\vec{v}$

2°_ Vitesse de la voiture = C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{OG}$

a_ Coordonnées de la vitesse = $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4t \text{ (on dérive } x) \\ \frac{dz}{dt} = 2 \text{ (on dérive } z) \end{cases}$

soit : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = 4t \\ v_z = 2 \end{cases}$

Vitesse scalaire $v(t)$

b_ Expression de la vitesse (valeur scalaire) = $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}}$

Soit = $v(t) = \sqrt{(4t)^2 + (2)^2} = \sqrt{16t^2+4} \iff v(t) = 2.\sqrt{1+4t^2}$

c_ Vitesse à $t = 2s$ = $v(t=2s) = 2.\sqrt{1+4\times 2^2} = 2.\sqrt{17}$

soit $v(t=2s) \simeq 8{,}25\, m.s^{-1}$

3°_ Accélération de la voiture = C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse

a_ Coordonnées de l'accélération = $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 4 \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$

soit : $\vec{a} = \begin{cases} a_x = 4 \\ a_z = 0 \end{cases}$

b_ Expression scalaire de l'accélération = $\boxed{a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$

soit = $a(t) = \sqrt{4^2+0^2} \Rightarrow a(t) = 4\, m.s^{-2}$

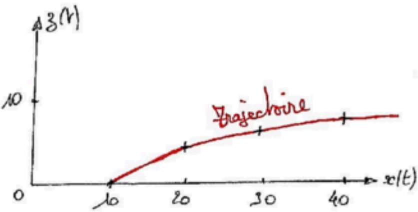
4°_ Trajectoire = C'est la relation entre les coordonnées de position $x$ et $z$.

$\begin{cases} x(t) = 2t^2+10 \\ z(t) = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2(z/2)^2+10 \\ t = z/2 \end{cases} \iff x = z^2/2 + 10 \iff z^2 = 2(x-10)$

Soit : $z = \sqrt{2x-20}$

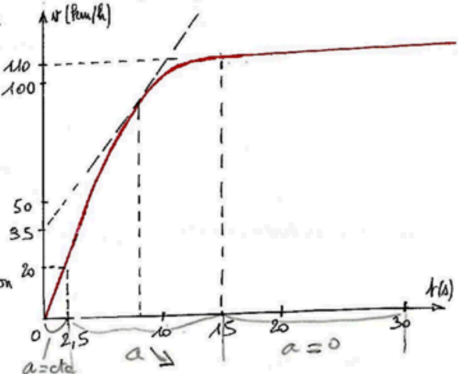
d'où le tableau de valeurs :

| $x$ | $z$ |
|---|---|
| 10 | 0 |
| 20 | $\sqrt{20} \simeq 4{,}5$ |
| 30 | $\sqrt{40} \simeq 6{,}3$ |
| 40 | $\sqrt{60} \simeq 7{,}7$ |



Exercice 2 =

1° Evolution de la vitesse = De 0 à 2,5 s accélération uniforme (pente constante) constante de 2,5 s à 15 s mouvement accéléré, puis après 15 s vitesse constante, c'est-à-dire mouvement rectiligne uniforme (puisque la route est droite).




2° Accélération =

a. Définition = $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Ici la route étant rectiligne il y a une seule composante de $\vec{v}$ et $\vec{a}$, celle de la direction de la route.

On peut donc écrire

$$a = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

b. Calcul de a à partir de la courbe =

La relation $a = \frac{dv}{dt}$, c'est à dire que a est la dérivée de v par rapport au temps montre que a est la pente de la courbe, on pourra calculer a en prenant la pente de la tangente.

c. Accélération constante : $a = \frac{dv}{dt} = cte_1 \overset{\text{intégration}}{\Longrightarrow} v(t) = \underbrace{cte_1 \times t + cte_2}_{\text{équation d'une droite}}$

Il faut chercher les endroits où v varie linéairement. Soit de 0 à 2,5 s puis après 15 s.

d. Accélérations à t = 1 s et à t = 8 s.

$\frac{20-0}{2,5-0} = 8\,m.s^{-2}$

* à t = 1 s on est à accélération constante pente $= \frac{20}{2,5} = 8\,m.s^{-2}$
* à t = 8 s on a : $\frac{110}{35} = 3\,m.s^{-2}$ $\frac{110-35}{8-0} = 9,375$

Rque = vu le tracé "à la main" on n'est pas très précis mais cela aurait donné $a(1s) = 5,5\,m.s^{-2}$ et $a(8s) = 1,4\,m.s^{-2}$ avec une photocopie exacte du tracé.

## Exercice 3 =

1°- a- Position du système :

Puisque la vitesse est la dérivée de la position, inversement la position est donnée par l'intégrale de la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = 4 \\ v_y = -3t \end{cases} \xrightarrow{\text{On intègre}} \vec{OG} = \begin{cases} x = 4t + cte_1 \\ y = -\frac{3}{2}t^2 + cte_2 \end{cases}$$

Il manque donc de connaître les 2 constantes d'intégration $cte_1$ et $cte_2$ pour connaître la position du système.

b- Accélération = On dérive la vitesse par rapport au temps =

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = 4 \\ v_y = -3t \end{cases} \xrightarrow{\text{On dérive}} \boxed{\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -3 \end{cases}}$$

2°- Expression de la position = à $t = 0$ on a $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 1 \end{cases}$

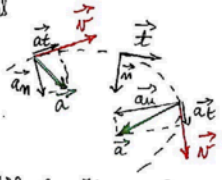
$$\begin{cases} x(t) = 4t + cte_1 \Rightarrow x(0) = cte_1 = 0 \\ y(t) = -\frac{3}{2}t^2 + cte_2 \Rightarrow y(0) = cte_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \begin{cases} x(t) = 4t \\ y(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 1 \end{cases}}$$

---

## Exercice 4 =

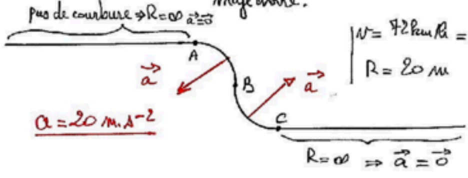
* Le repère de Frenet = Lorsqu'un mobile aborde une courbe de rayon R, sa vitesse est un vecteur $\vec{v}$ tangent à la trajectoire. Son vecteur accélération se décompose en une partie tangente à la trajectoire si la vitesse $v$ varie, et en une partie orthogonale due à la variation du vecteur $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$ avec $\begin{cases} \vec{t} = \text{vecteur unitaire tangent} \\ \vec{n} = \text{vecteur unitaire normal} \end{cases}$




* Cas présent = $v = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

d'où : $\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}}$ = l'accélération est normale à la trajectoire.




$v = 72\ km/h = \frac{72000}{3600} = 20\ m.s^{-1}$

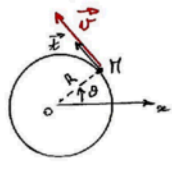
$R = 20\ m \Rightarrow a = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{20} = 20\ m.s^{-2}$

## Exercice 5 :

1°- Vitesse de rotation : $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \Rightarrow \underline{\omega = 16t + 5}$ (unité = rad/s = $s^{-1}$ car rad n'est pas une unité)

2°- Accélération : $\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \Rightarrow \underline{\alpha = 16}$ (unité = $s^{-2}$)

$\alpha$ = cte ⇒ mouvement uniformément accéléré.




3°- Vitesse du point M : $v = R.\frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow v = 48t + 15$

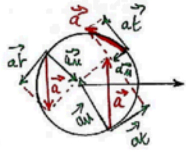
4°- Accélération de M :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{t} + \frac{v^2}{R}.\vec{n}}$$

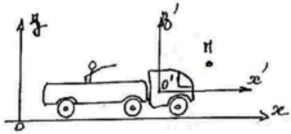
$a_t = 3 \times 16 = 48\ m.s^{-2}$

$v = 48t + 15 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 48 = $ cte

$\frac{v^2}{R} = \frac{(48t+15)^2}{3}$ croît avec le temps $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$




## Exercice 6 : Composition des mouvements :

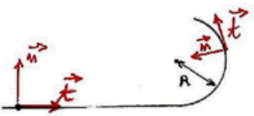



Soit M le projectile, O' un point du camion et O un point de la route. On a donc 2 repères : | $R_o$ le repère terrestre $(O, x, z)$ | $R$ le repère du camion $(O', x', z')$

* Position de M dans $R_o$ : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$
* Vitesse de l'objet dans le repère terrestre $R_o$ : Il faut dériver la position :

$$\underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\text{vitesse de M dans } R_o} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}}_{\text{vitesse de R dans } R_o} + \underbrace{\frac{d\vec{O'M}}{dt}}_{\text{vitesse de M dans R}} \iff \boxed{\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}}$$

## Exercice 7 :




* Sur la ligne droite : $\vec{v} = v.\vec{t}$

$\vec{t}$ = vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
$v$ = vitesse avec : v initiale : $v(t=0) = 0\ m.s^{-1}$ et vitesse finale : $v(t) = 70\ km/h = \frac{70000}{3600}$
soit : $v(t = \Delta t) = 19{,}44\ m/s$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \iff a.\vec{t} = \frac{dv}{dt}\vec{t} \iff a = \frac{dv}{dt} = $ cte $\Rightarrow a = \frac{v(\Delta t) - v(0)}{\Delta t} = \frac{19{,}44}{10}$

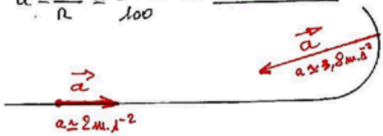
soit : $\underline{a = 1{,}944\ m.s^{-2}}$

* Dans le virage =

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$ avec $v = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

soit : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ ( accélération centripète)

d'où = $a = \frac{v^2}{R} = \frac{19{,}44^2}{100} \Rightarrow \underline{a = 3{,}78\,m.s^{-2}}$




---

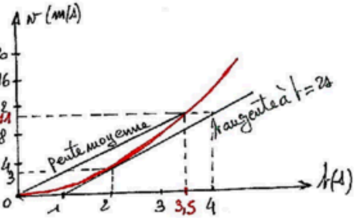
Exercice 8 =

a- Accélération moyenne entre 0 et 3,5 s =

pente moyenne = $\frac{11-0}{3{,}5-0} = \underline{3{,}14\,m\,s^{-2}}$

b- Accélération instantanée à t = 2 s =

$a = \frac{12-0}{4-1} \Rightarrow \underline{a = 4\,m.s^{-2}}$




c- Distance parcourue entre 2 et 4 s =

On a calculé l'accélération à t = 2 s, il va falloir intégrer une première fois pour calculer la vitesse $v$, puis une deuxième pour obtenir les positions.

* Vitesse = $a = 4\,m/s^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 \Rightarrow v(t) = 4t + \text{cte}$

or à $t = 1$ on a $v = 0$ $\Rightarrow v(1) = 4 + \text{cte} = 0 \Rightarrow \text{cte} = -4$

D'où = $v(t) = 4t - 4$

* Position = = $v(t) = 4t - 4 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = 4t - 4$

soit : $x(t) = 2t^2 - 4t + \text{cte}$

avec : $x(0) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$ d'où = $x(t) = 2t^2 - 4t$.

* Distance parcourue : $x(4) - x(2) = (2(4)^2 - 4\times4) - (2(2^2) - 4\times2)$

$= (32 - 20) - (8 - 8)$

$\Rightarrow \underline{d = 12\,m}$

---