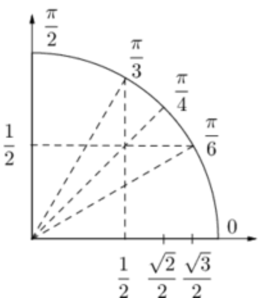
Trigonométrie

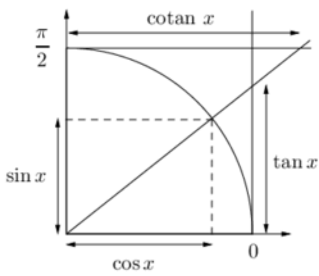
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{cotan} x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{cotan} x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{cotan} x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\text{cotan } x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin, Arccos, Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arccos}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan}\ \lambda \mod \pi$
- Si $\text{cotan } x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot}\ \lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin}\ \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	$\text{Arcsin } x$	$\text{Arccos } x$	$\text{Arctan } x$	$\text{Arccot } x$
Ensemble de définition	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2\,;\pi/2]$	$[0\,;\pi]$	$]-\pi/2\,;\pi/2[$	$]0\,;\pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \pi/2$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\, \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arccot}\, x = \pi/2$$

$$\text{Arccot}\, x = \begin{cases} \text{Arctan}\, 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan}\, 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, 1/x = \text{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan\frac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a\\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a\end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a\ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p + \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p+q)}{\mathrm{ch}\ p\ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a-b) = \frac{\mathrm{th}\ a - \mathrm{th}\ b}{1 - \mathrm{th}\ a\ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p - \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p-q)}{\mathrm{ch}\ p\ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\ 2x &= \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x\\ &= 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1\\ &= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x\end{aligned} \qquad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x + 1}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ 2x = 2\,\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{ch}\ x \qquad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\ 2x = \frac{2\,\mathrm{th}\ x}{1 + \mathrm{th}^2 x} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{\mathrm{sh}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{\mathrm{sh}\ 2x}$$

En notant $t = \text{th}\ \dfrac{x}{2}$, on a :

$$\text{sh}\ x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad\qquad \text{ch}\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\text{ch}\ a + \text{sh}\ a)^n = \text{ch}\ na + \text{sh}\ na$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{ch}\ 3a &= \text{ch}^3 a + 3\,\text{ch}\ a\,\text{sh}^2 a \\ &= 4\,\text{ch}^3 a - 3\,\text{ch}\ a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sh}\ 3a &= 3\,\text{ch}^2 a\,\text{sh}\ a + \text{sh}^3 a \\ &= 4\,\text{sh}^3 a + 3\,\text{sh}\ a \end{aligned}$$

$$\text{th}\ 3a = \frac{3\,\text{th}\ a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}$$