Séries

1. Séries Numériques

✓ *Géométrique*

$$\sum q^n \quad cv \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

✓ *Exponentielle*

$$\sum \frac{x^n}{n!} \quad cv$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

✓ *Riemann*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \quad cv \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\zeta : \left| \begin{array}{l}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. \qquad fonction\ zêta\ de\ Riemann\ (cf\ Etude\ 3)$$

✓ *Harmonique Alternée*

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad cv$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

✓ *Bertrand*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln n)^\beta} \quad cv \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1\ et\ \beta > 1 \end{cases} ou$$

✓ *Produit de Cauchy*

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \cdot V_{n-k}$$

$$\sum U_n\ cv\ \ et\ \ \sum V_n\ \ cv\ abs\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} V_n\right)$$

- *D'Alembert*

$$\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum U_n \ cv \ abs$$

$$\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum U_n \ div \ gross$$

$$\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 1 \Rightarrow pas \ de \ conclusion$$

- *Séries Alternées*

$$\left.\begin{array}{c} \sum U_n \ alternée \\ (|U_n|) \ décroit \ vers \ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum U_n \ cv \\ R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \\ \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} U_k \quad est \ du \ signe \ de \ U_p \end{cases}$$

2. Séries de fonctions

- $\sum U_n \ cv \Leftrightarrow (R_n) \ CU \ vers \ 0$

- *Continuité*

$$\left.\begin{array}{c} \forall n, \ f_n \ cont \ en \ a \\ \sum f_n \ CU \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \ cont \ en \ a$$

- *Double Limite*

$$\sum f_n \ CU \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \lim\limits_{n} \lim\limits_{x\to a} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \end{cases}$$

- $\sum f_n \ CN \quad \Leftrightarrow \quad \sum \|f_n\|_\infty^I \ cv$

3. Séries entières

- *Abel*

$$|z| < r,\ \ (a_n\, z^n) \leq \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

$$|a_n| \ \leq \ |b_n| \qquad \Rightarrow \ R_a \geq R_b$$

$$\exists \alpha, a_n = O(n^\alpha\, b_n) \ \Rightarrow \ R_a \leq R_b$$

$$\exists \alpha,\ \ a_n \sim n^\alpha\, b_n \qquad \Rightarrow \ R_a = R_b$$

- *D'Alembert*

$$lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = l \Rightarrow R = \frac{1}{l}$$

- *Série de Taylor (ou Mac-Laurin)*

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

- $f\colon]-r,r[\to \mathbb{R} \ \ DSE(0) \ \ \Rightarrow \begin{cases} f\ est\ C^\infty\ sur\ ]-r,r[\\ DSE\ unique = série\ de\ Taylor\ de\ f\ en\ 0 \end{cases}$

- $\left.\begin{matrix} f\ est\ C^\infty\ sur\ \ ]-r,r[\\ \lim\limits_n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) \cdot dt = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\ \ DSE(0)$

- $\left.\begin{matrix} f\ est\ C^\infty\ sur\ \ ]-r,r[\\ \exists M, \forall n, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\ \ DSE(0)$

$$\begin{tikzcd} & CU \arrow[dr, Rightarrow] & \\ CN \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & CS \\ & CA \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$