# Phénomènes de Transports

## 1. Diffusion de particules

➢ *Diffusion*

✓ *Nombre de particules*

$$\delta N = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \cdot dt$$

$$[j] = m^{-2} \cdot s^{-1}$$

$\delta N$ *sans dimension*

✓ *Débit de particules*

$$D = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

✓ *Densité de particules*

$$n = \frac{\delta N}{d\tau}$$

✓ *Loi de Fick*

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{grad}\,(n)$$

✓ *Equations de continuité et de diffusion*

- *Coordonnées Cartésiennes*

$$\text{Continuité : } \frac{\delta n}{\delta t} = -\frac{\delta j}{\delta x} + \alpha$$

$$\begin{aligned}\delta N &= N(t+dt) - N(t)\\ &= \big(n(x,t+dt) - n(x,t)\big) \cdot S \cdot dx\\ &= j(x,t) \cdot S \cdot dt - j(x+dx,t) \cdot S \cdot dt\end{aligned}$$

$$[n(x,t+dt) - n(x,t)] \cdot S \cdot dx = [j(x,t) - j(x+dx,t)] \cdot S \cdot dt$$

$$\frac{\delta n}{\delta t} = -\frac{\delta j}{\delta x} + \alpha$$

*Particules reçues (qui entrent dans $d\tau$)*
*Particules perdues (qui sortent de $d\tau$)*
*$\alpha$ les particules créées dans $d\tau$*

$$Diffusion : \frac{\delta n}{\delta t} = D \cdot \frac{\delta^2 n}{\delta x^2} + \alpha$$

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{grad}(n)$$

$$j = -D \cdot \frac{\delta n}{\delta x}$$

*Avec l'équation de continuité :*

$$\frac{\delta n}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta x}\left(-D\frac{\delta n}{\delta x}\right)$$

$$\frac{\delta n}{\delta t} = D \cdot \frac{\delta n^2}{\delta x^2} + \alpha$$

- *Coordonnées Cylindriques*

$$d\tau = 2\pi r \cdot dr \cdot l$$

$$Continuité : \frac{\delta n}{\delta t} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r}(r \cdot j) + \alpha$$

$$Diffusion : \frac{\delta n}{\delta t} = \frac{D}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r}\left(r \cdot \frac{\delta n}{\delta r}\right) + \alpha$$

- *Coordonnées Sphériques*

$$d\tau = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$Continuité : \frac{\delta n}{\delta t} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r}(r^2 \cdot j) + \alpha$$

$$Diffusion : \frac{\delta n}{\delta t} = \frac{D}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r}\left(r^2 \cdot \frac{\delta n}{\delta r}\right) + \alpha$$

- *Cas Général*

$$Continuité : \frac{\delta n}{\delta t} = -div\,(\vec{j}) + \alpha$$

$$Diffusion : \frac{\delta n}{\delta t} = D \cdot \Delta n + \alpha$$

## *Convection*

$$\vec{j}_{conv} = n \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$ *la vitesse des particules*

## *Nombre de Péclet*

$$j_{diff} = D \cdot \frac{n}{l} \qquad j_{conv} = n \cdot v$$

$$P_e = \frac{j_{conv}}{j_{diff}} = \frac{l \cdot v}{D}$$

## 2. Diffusion thermique

- *Flux thermique*

$$\varphi = \iint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$[j_{th}] = W.m^{-1}$$

$$[\varphi] = W$$

- *Loi de Fourrier*

$$\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}\,(T)$$

- *Equations de continuité et de diffusion*
  - *Coordonnées Cartésiennes*

$$Continuité : \rho \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta j_{th}}{\delta x}$$

$$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$$
$$dU = \delta Q$$
$$dE_c = 0 \quad car\ immobile$$
$$\delta W = 0 \quad car\ \delta W = -P \cdot dV \quad et\ V\ cst$$

$$\begin{aligned} dU &= U(t+dt) - U(t) \\ &= \big(u(x,t+dt) - u(x,t)\big) \cdot \rho \cdot d\tau \\ &= dt \cdot \rho \cdot \frac{\delta u}{\delta t} \cdot S \cdot dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= \varphi(x,t) \cdot dt - \varphi(x+dx,t) \cdot dt \\ &= \big(j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)\big) \cdot S \cdot dt \\ &= -dx \cdot \frac{\delta j_{th}}{\delta x} \cdot S \cdot dt \end{aligned}$$

$$\rho \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta j_{th}}{\delta x}$$

$$Diffusion : \frac{\delta T}{\delta t} = D_{th} \cdot \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \qquad avec\ D_{th} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_v}$$

$$du = c_v \cdot dT \ \Rightarrow \ \frac{\delta u}{\delta t} = c_v \cdot \frac{\delta T}{\delta T}$$

$$j_{th} = -\lambda \cdot \frac{\delta T}{\delta x}$$

*Avec l'équation de continuité :*

$$\rho \cdot c_v \cdot \frac{\delta T}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta x}\left(-\lambda \frac{\delta T}{\delta x}\right)$$

- *Coordonnées Cylindriques*

$$Continuité : \rho \cdot c_v \cdot \frac{\delta T}{\delta t} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r}(r \cdot j_{th})$$

$$Diffusion : \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{D_{th}}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta r}\left(r \cdot \frac{\delta T}{\delta r}\right)$$

- *Coordonnées Sphériques*

$$Continuité : \rho \cdot c_v \cdot \frac{\delta T}{\delta t} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r}(r^2 \cdot j_{th})$$

$$Diffusion : \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{D_{th}}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r}\left(r^2 \cdot \frac{\delta T}{\delta r}\right)$$

- *Cas Général*

$$Continuité : \rho \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = -div\,(\overrightarrow{j_{th}})$$

$$Diffusion : \frac{\delta T}{\delta t} = D_{th} \cdot \Delta T \qquad avec\ D_{th} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_v}$$

✓ *Loi de Newton*

*h coefficient de proportionnalité*

$$\delta Q = h \cdot (T_1 - T_2) \cdot dS \cdot dt$$

$$j_{th} = h \cdot (T_1 - T_2)$$

✓ *Résistance thermique*

$$T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \varphi \iff V_1 - V_2 = R \cdot I \quad (analogie)$$

$$[R_{th}] = K.W^{-1}$$