

# BankAnnales 2011

## Mathématiques S *Obligatoire & Spécialité*

### Les seules Annales avec

- *Sujets inédits session 2009*
- *Premiers sujets session 2010*
- *Résumé des dernières tendances*
- *Analyse des derniers sujets*
- *Exercices antérieurs ciblés*
- *Exercices antérieurs complémentaires*



19 juin 2010  
2ème édition

Xavier ANDREANI  
TI-Bank

## Table des matières

Mot de l'auteur.....	3
I.L'épreuve.....	4
A)Les sujets inédits.....	5
B)Calendrier des sujets inédits.....	6
C)Historique des évolutions récentes de l'épreuve.....	7
D)Les tendances suite à la dernière session.....	8
1)Calculatrices autorisées.....	8
2)Un QCM en mutation qui revient.....	8
3)La ROC contre-attaque.....	9
4)Une question de recherche, indétrônable.....	10
5)Des thèmes de Première en retrait.....	11
E)Esquisse de la prochaine épreuve du BAC.....	12
1)Les types d'exercices.....	12
2)Les thèmes des exercices.....	13
3)Les regroupements de thèmes.....	14
4)Bilan.....	15
F)Planning des dernières révisions.....	16
II.Sujets complets.....	17
A)Session 2009 – sujets inédits.....	17
1)Polynésie septembre 2009 (obligatoire).....	17
2)France septembre 2009.....	23
3)Antilles-Guyane septembre 2009.....	31
4)Nouvelle Calédonie novembre 2009.....	35
5)Amérique du Sud novembre 2009.....	39
B)Session 2010 – premiers sujets.....	43
1)Inde avril 2010.....	43
2)Amérique du Nord juin 2010.....	50
3)Liban juin 2010.....	59
4)Polynésie juin 2010.....	65
5)Centres étrangers juin 2010.....	73
6)Antilles-Guyane juin 2010.....	79
III.Exercices antérieurs ciblés.....	84
A)Questions de recherche .....	84
B)Exercices avec application sur calculatrice.....	101
IV.Exercices antérieurs complémentaires.....	104
A)Probabilités.....	104
B)Géométrie dans l'espace.....	122
C)Nombres complexes.....	140

## Mot de l'auteur

Ces annales peuvent être librement copiées, téléchargées, imprimées dans les conditions suivantes:

- pour l'usage privé des élèves ou candidats
- pour l'usage professionnel exclusif des personnels des établissements d'enseignement public et privé sous contrat

***Toute autre utilisation professionnelle** sans rémunération de l'auteur (notamment lors de tout cours particulier ou collectif du secteur privé, que ce soit rémunéré ou non) **est interdite**.*

Donc, pour un usage professionnel dans le secteur marchand/privé, contactez-moi:

Xavier Andréani

[andreanx@hotmail.com](mailto:andreanx@hotmail.com)

# I. L'épreuve

Ce recueil a pour but:

- de vous présenter les derniers sujets du BAC, tombés à partir du mois de septembre, et qui donc ne sont pas disponibles dans le commerce (les annales étant éditées au mois d'août, et n'étant pas rééditées en cours d'année scolaire).
- d'analyser les sujets les plus récents, afin de déduire les consignes qui ont été données aux concepteurs de sujets pour la nouvelle session – en effet, depuis 2003, il y a eu des nouveautés chaque année à l'épreuve de mathématiques

Ce recueil se concentre donc sur la nouveauté, afin que vous sachiez à quoi vous attendre, et puissiez mieux vous préparer.

Aucune correction n'est proposée. En effet, mon expérience personnelle montre que beaucoup d'élèves ont tendance à regarder la correction trop vite. Or, la réponse aura de bien meilleures chances d'être retenue, et ressortie dans le bon contexte, que si elle a été **cherchée** avant d'être trouvée ou donnée à l'élève.

Rien ne vous empêche toutefois de demander de l'aide à un professeur, qui saura donc vous guider, vous amener à trouver par vous-même, et donc à savoir refaire.

A défaut, après avoir cherché, vous pouvez par exemple venir demander de l'aide sur le forum TI-Bank à la rubrique suivante: <http://tibank.forumactif.com/blabla-f18>

- Dans une première partie seront analysées les statistiques concernant les épreuves antérieures.
- Dans une seconde partie seront présentés les sujets inédits complets.
- Dans une troisième partie seront présentés des exercices antérieurs sur des thèmes qui pourraient tomber cette année, selon ce qui aura été déduit des deux premières parties.
- Enfin dans une quatrième partie seront présentés des exercices antérieurs complémentaires afin d'approfondir vos connaissances, notamment sur les gros chapitres du programme qui ne seraient que partiellement couverts par les parties d'avant.



## **A) Les sujets inédits**

Les **sujets inédits** sont les sujets de BAC qui tombent à partir de septembre. On distingue deux types de sujets:












- les sujets inédits clôturant la session BAC précédente: de septembre à mars
- les sujets inédits inaugurant la nouvelle session BAC: de avril à juin

L'utilité de ces sujets est double:


- Ces sujets n'étant pas disponibles dans le commerce avant l'année scolaire suivante, les professeurs en profitent souvent et s'inspirent de ces sujets pour les **devoirs surveillés** mais surtout **bac blancs**, et **devoirs de fin d'année**..
- De plus, les sujets inaugurant la nouvelle session sont (dans leur forme) significatifs de ce que vous aurez au BAC, car ils respectent les nouvelles consignes qui ont éventuellement été données aux concepteurs de sujets.

Il est donc très important (du moins en mathématiques) de travailler les tous derniers sujets.

## B) Calendrier des sujets inédits

Session 2009	Jeudi 3 septembre 2009:	Polynésie française (remplacement) 
	Mercredi 9 septembre:	France métropole (remplacement) 
	Jeudi 10 septembre 2009:	Antilles-Guyane-Guadeloupe-Martinique (remplacement) 
	Du 12 au 17 novembre 2009:	Nouvelle Calédonie 
	Novembre 2009:	Amérique du Sud 
	Mars 2009:	Nouvelle Calédonie (remplacement)
Session 2010	Mercredi 21 avril 2010:	Inde 
	Jeudi 3 juin 2010:	Amérique du Nord  Liban 
	Vendredi 11 juin 2010:	Polynésie française 
	Lundi 14 juin 2010:	Centres étrangers (Europe / Afrique) 
	Vendredi 18 juin 2010:	Antilles-Guyane-Guadeloupe-Martinique 
	Mardi 22 juin 2010:	<b>France métropolitaine</b> Île de la Réunion / Mayotte Asie

### Légende:

-  sujet inédit contenu dans ce livret
- sujet tombant avant l'épreuve métropolitaine
- sujet qui tombera trop tard

Comme précisé précédemment, gardez le contact pour obtenir les derniers sujets. Consultez les dernières nouvelles et mises-à-jour de ce document sur: <http://ti.bank.free.fr>

A défaut de mise-à-jour, vous pouvez tenter de récupérer les sujets vous-même:

- Amérique du Nord : <http://www.rochambeau.org/informations/examens/examens.html>
- Polynésie : <http://www.des.pf/view.php?1056388010-303378>
- Centres Étrangers : <http://www.lgp.ae/examens/examindex.html>
- Antilles/Guyane : <http://www-peda.ac-martinique.fr/maths/bac.shtml>
- Liban : <http://www.clw.edu.lb/cdi/>
- Île de la Réunion : [http://pagesperso-orange.fr/apmep\\_reunion/page\\_bac.htm](http://pagesperso-orange.fr/apmep_reunion/page_bac.htm)
- Asie : <http://www.fis.edu.hk/web/Default.aspx?lang=fr-fr&r=11>
- Toutes académies : <http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article2360>

### C) *Historique des évolutions récentes de l'épreuve*

Depuis l'abrogation de l'ancienne maquette en 2004, l'épreuve de mathématique a évolué chaque année, introduisant sans arrêt des nouveautés, semblant chercher une nouvelle forme, sans jamais la trouver. C'est pour cela qu'il faut toujours être au courant des derniers sujets.

2002	<ul style="list-style-type: none"> <li>expérimentations isolées d'exercices de type QCM</li> </ul>
2003	<ul style="list-style-type: none"> <li>expérimentations isolées d'exercices de type QCM</li> <li>expérimentation isolée d'une épreuve sans calculatrice</li> </ul>
2004	<ul style="list-style-type: none"> <li>introduction généralisée d'exercices de type QCM</li> <li>modification de la maquette de l'épreuve: de 2 exercices sur 5 points, plus un problème d'étude de fonction sur 10 points, on passe à 3 à 5 exercices, sur des thèmes variés du programme, et notés à peu près équitablement</li> <li>suppression du formulaire</li> <li>expérimentations isolées d'exercices de type question de recherche</li> </ul>
2005	<ul style="list-style-type: none"> <li>présence massive d'exercices de type QCM</li> <li>introduction généralisée d'exercices de type ROC</li> <li>expérimentation isolée d'un exercice piégeant la calculatrice</li> </ul>
2006	<ul style="list-style-type: none"> <li>retour des études de fonctions (assez boudées depuis la suppression du problème en 2004)</li> <li>apparition d'exercices prépondérants notés sur 7 ou 8 points (bref - retour du problème supprimé en 2004)</li> <li>mais paradoxalement aussi, apparition de sujets avec 5 exercices</li> </ul>
2007	<ul style="list-style-type: none"> <li>part anormalement élevée (presque 1 sujet sur 2) d'exercices portant sur des thèmes de Première (barycentres, produits scalaires, mais surtout trigonométrie...)</li> <li>expérimentations isolées d'exercices de type question de recherche</li> </ul>
2008	<ul style="list-style-type: none"> <li>introduction généralisée de la question de recherche</li> <li>part non négligeable de thèmes de Première (barycentres, produits scalaires...)</li> <li>expérimentations isolées d'exercices avec des lectures graphiques</li> </ul>

## D) Les tendances suite à la dernière session

### 1) Calculatrices autorisées



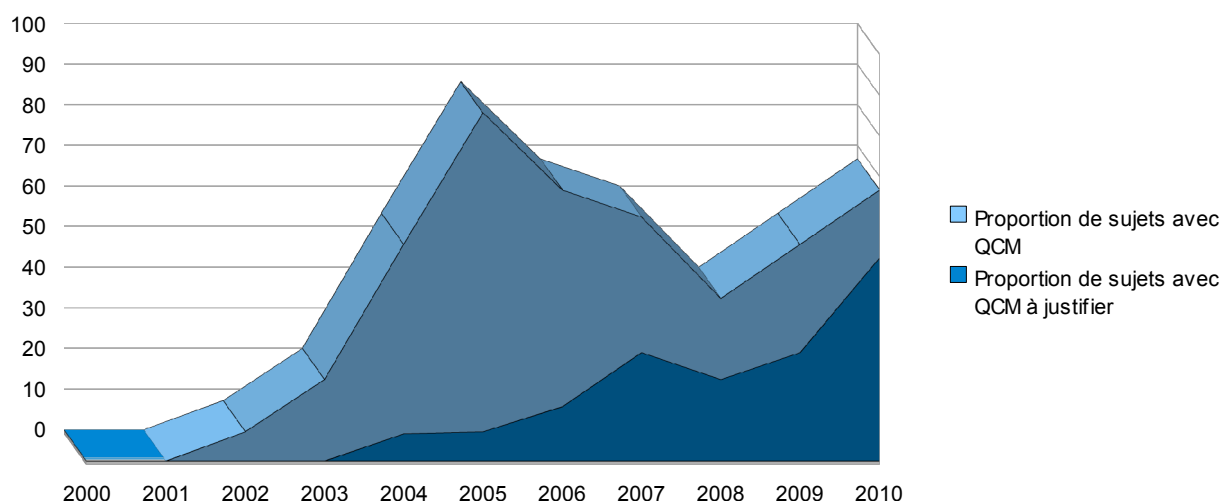
Depuis la session 2000, la calculatrice n'a été interdite qu'une seule fois en Asie en juin 2003. Comme cela ne s'est pas reproduit, je pense que les résultats (*catastrophiques?...*) de cette expérimentation n'ont pas été encourageants pour généraliser cette pratique. De plus, à mon avis ce n'est plus d'actualité, surtout à l'heure où on veut introduire une épreuve pratique pour apprendre aux élèves à mieux se servir de leur calculatrice (ou ordinateur) dans une démarche de recherche.

→ ***La calculatrice devrait donc être autorisée!***

N'hésitez donc pas à venir la remplir en puisant dans mes propres programmes (<http://ti.bank.free.fr/index.php?mod=archives&ac=voir2&id=1080>), et plus généralement dans tout ce qui est disponible sur <http://ti.bank.free.fr>.

### 2) Un QCM en mutation qui revient

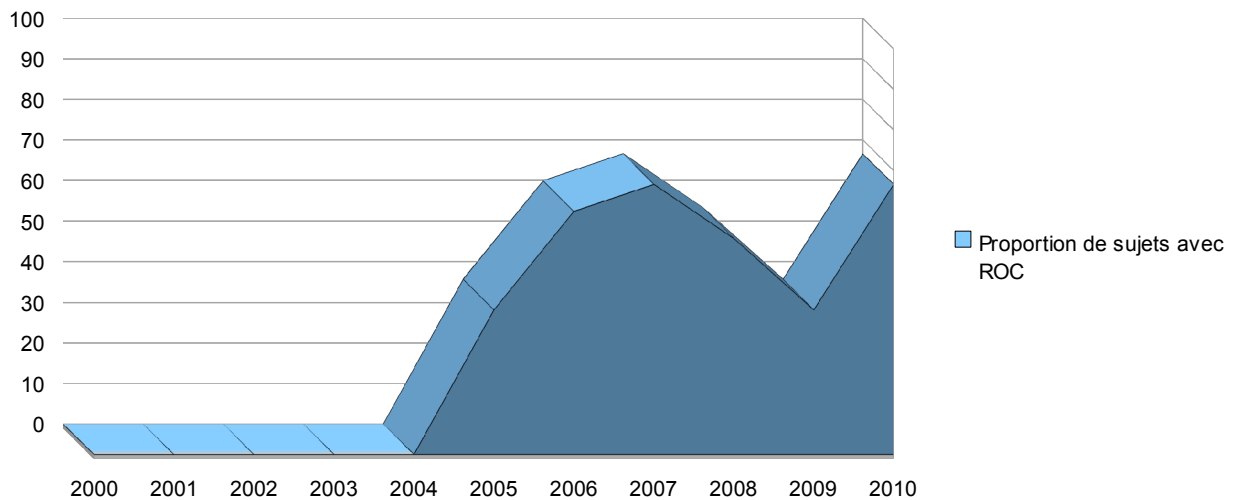
Expérimenté en 2002-2003, puis introduit massivement en 2004-2005 (85% des sujets au pic de 2005), le QCM a été victime de son succès. En effet, sa sur-utilisation en a très largement montré les limites: sans justification, il est très facile de l'expédier en 5 minutes avec une bonne calculatrice. Ce fut une désillusion: cela explique la chute des QCMs de 2005 à 2008. Pour déjouer cette astuce, on a commencé à demander de plus en plus souvent de justifier, et l'on attribue de moins en moins de points de pénalités (points négatifs). Sous cette nouvelle forme, le QCM semble revenir en force ces dernières années.



→ ***Il est donc fort possible que vous ayez un QCM cette année, et si c'est le cas il est très probable qu'il soit sans pénalité mais avec justification (exercices qui prennent souvent la forme de Vrai/Faux).***

### 3) La ROC contre-attaque

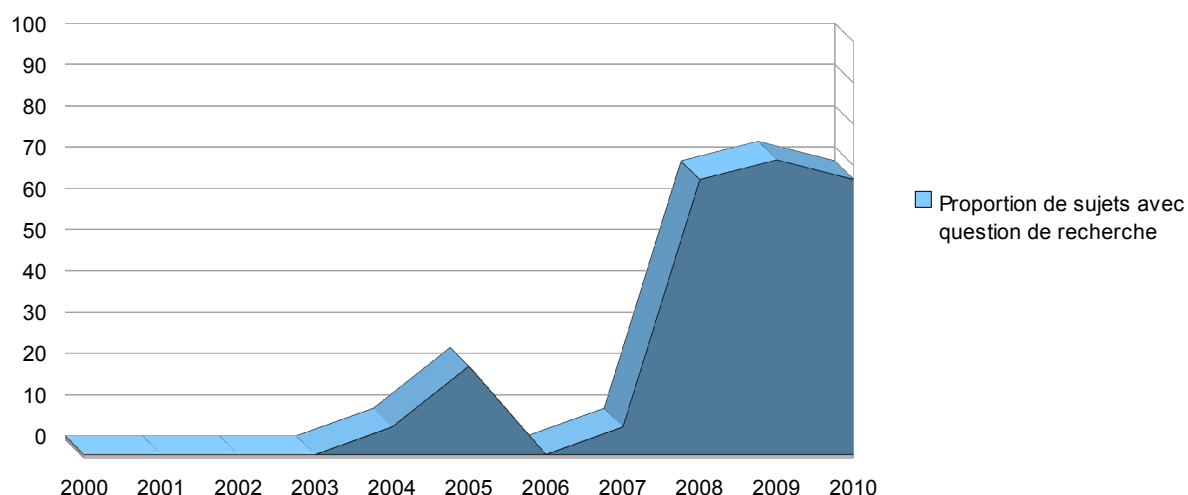
En l'introduisant brutalement à la session 2005, on connaissait déjà les défauts de la ROC. En effet, il serait très facile de restituer une démonstration de cours apprise par cœur, ou entrée dans la calculatrice. Pour contrer cela, dès le début les consignes officielles étaient de guider/imposer la démonstration dans l'énoncé. Comme il y a diverses méthodes pour redémontrer un même résultat (selon les prérequis considérés), il y a peu de chances que la démonstration demandée soit alors exactement celle du cours ou de la calculatrice. Le défaut qui en résulte, est que cette contrainte imposée dans l'énoncé est en fait un merveilleux indice, sur comment démontrer (bref, une arme à double tranchant). Toute la phase de réflexion/recherche s'en retrouve alors court-circuitée. Cela explique le désintérêt pour ce type d'exercice, qui n'a fait que reculer depuis 2007, avec un minimum de 35,71% de sujets en 2009. Toutefois, les premiers sujets de la session 2010 semble montrer une part anormalement élevé de ROCs... Peut-être a-t-il été donné comme consigne cette année de mettre d'avantage de ROCs dans les sujets, mais je n'en ai pas encore l'interprétation.



→ *Il est donc possible que vous ayez une ROC cette année.*

#### 4) Une question de recherche, indétrônable

Après quelques expérimentations isolées en 2004, 2005 et 2007, la question de recherche est introduite massivement à la session 2008. Il s'agit d'un exercice ou d'une partie d'exercice énonçant un but à démontrer. La question peut s'arrêter là, ou éventuellement fournir un nombre restreint de sous-questions pour vous mettre sur la voie. C'est donc une question où vous n'êtes pas ou peu guidé: c'est comme si il manquait une partie de l'énoncé (tout ou partie des sous-questions). Cette question permet donc d'évaluer réellement l'esprit d'analyse et de synthèse, et pallie aux défauts de la ROC. La progression de la part des questions de recherche devrait se poursuivre.



→ ***Vous devriez très probablement avoir une ou deux questions de recherche cette année.***

N'hésitez donc pas à consulter plus loin (*partie III A*), les archives de toutes les questions de recherche tombées au BAC depuis 2004.

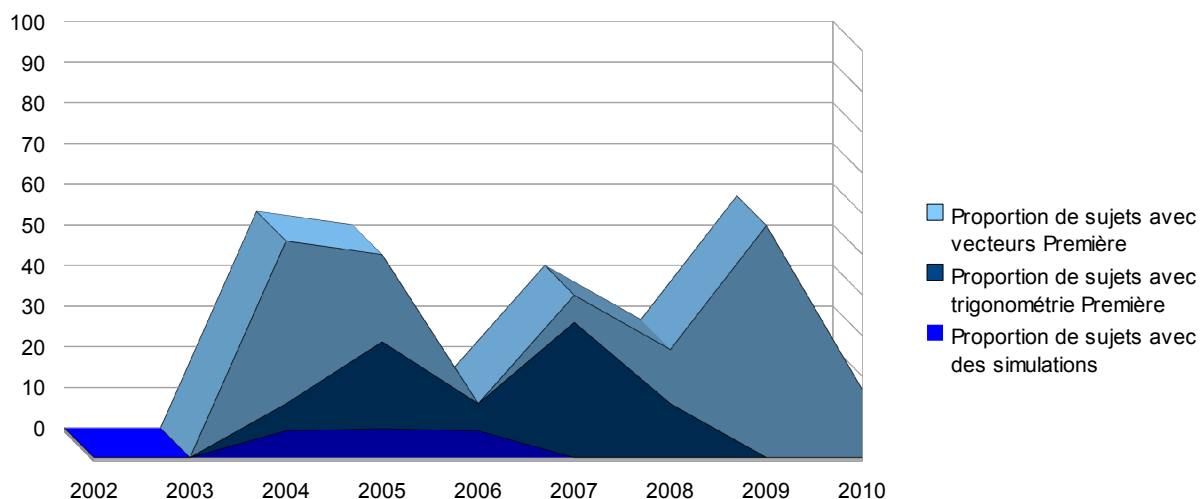


## 5) Des thèmes de Première en retrait

On peut également constater depuis 2004, la présence importante par accous de thèmes vus en Première (et qui ne sont pas forcément *bien* revus en Terminale selon le temps dont dispose le professeur – car ces thèmes justement ne sont pas au programme de cette classe qui est déjà assez lourd).

Ces thèmes incluent:

- la trigonométrie (*fonctions, formules d'addition, de duplication...*)
- les vecteurs (*barycentres, produits scalaires, lignes de niveau, ensemble de point...*)
- les statistiques (*mesure de la dispersion: médiane, quartiles – dans les simulations*)



Notamment à la session 2007, il y a eu un nombre anormalement élevé d'exercices sur la trigonométrie, semblant en disparition depuis. Mais depuis, les vecteurs (essentiellement dans le cadre des barycentres) semblent prendre le relais. Les simulations (thème commun avec les séries ES) ne sont plus tombées depuis 2006, et sont enseignées d'une façon différente en Seconde depuis cette année. Je ne pense pas qu'elles reviennent au BAC avant 2012.

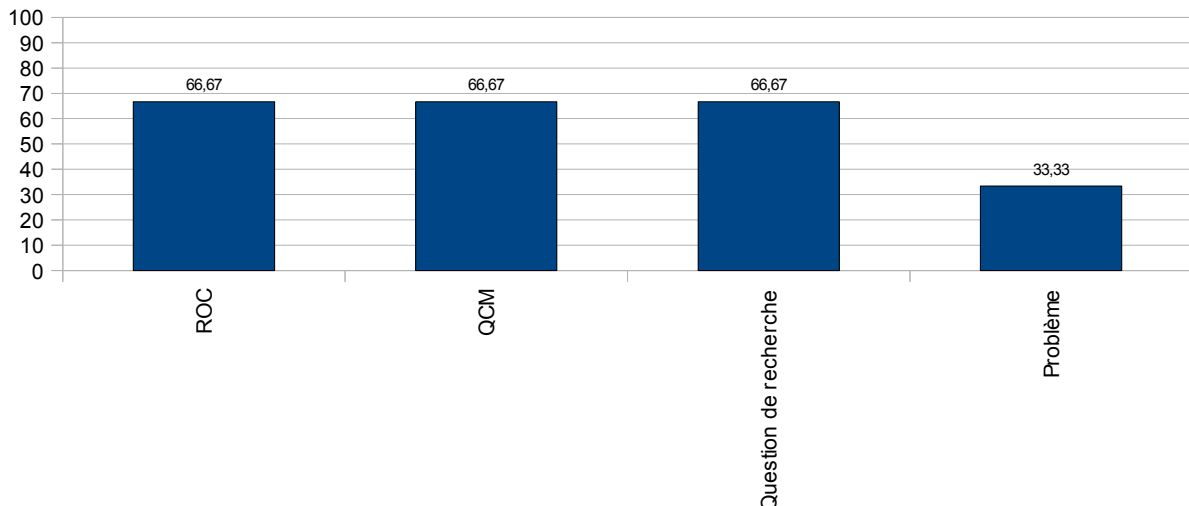
→ ***Vous ne devriez pas avoir d'exercice faisant appel à des méthodes de première cette année.***

## **E) Esquisse de la prochaine épreuve du BAC**

Dans cette partie, je vais tenter de vous esquisser la prochaine épreuve du BAC, en analysant les premiers sujets de la nouvelle session (depuis avril). En effet, ces sujets sont représentatifs des nouvelles consignes données aux concepteurs de sujets, consignes qui comme vous l'avez maintenant compris, changent chaque année.

### **1) Les types d'exercices**

Voici ce que donnent les types d'exercices tombés:



**Remarque:** Un problème désigne un exercice d'au moins 7 points sur 20.

On remarque:

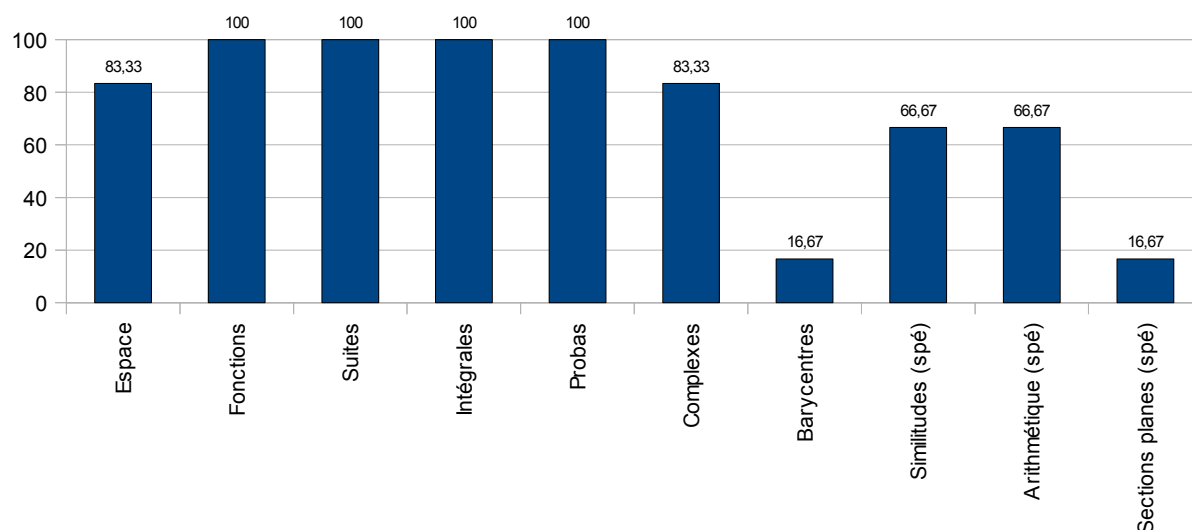
- Un nombre important de questions de recherche (4 sujets sur 6).
- Un nombre important de QCMs (4 sujets sur 6), mais qui demandent presque tous une justification.
- Un nombre important de ROCs (4 sujets sur 6).

Donc:

- ***Vous devriez très probablement avoir une ou deux questions de recherche cette année dans un ou deux exercices.***
- ***Vous devriez aussi avoir une exercice de QCM (qui sera très probablement à justifier) ou une ROC ou encore les deux.***

## 2) Les thèmes des exercices

Voici ce que donnent les thèmes abordés par les sujets:



On remarque:

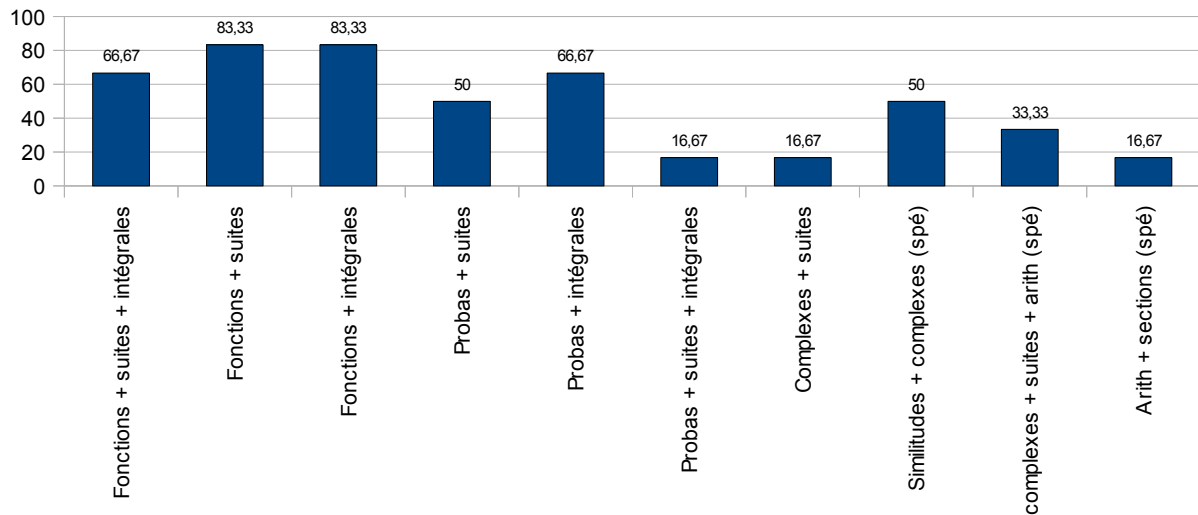
- Que tous les sujets interrogent sur les fonctions, et presque tous les sujets sur les complexes (*c'est normal*).
- Mais aussi que presque tous les sujets ont abordé la géométrie dans l'espace, les suites, les intégrales, et les probas (*c'est un peu plus étrange...*)

Donc:

- ***Vous devriez avoir des fonctions, des probas, des complexes, des suites, et des intégrales.***
- ***En spécialité, vous devriez avoir de l'arithmétique, ou des similitudes, ou les deux.***

### 3) Les regroupements de thèmes

Il y a donc beaucoup de thèmes qui tombent dans 100% des sujets... Pour y voir plus clair, voici les regroupements de thèmes qui ont été constatés au sein d'un même exercice:



On remarque:

- Que dans 5 sujets sur 6, les fonctions sont tombées dans des exercices où elles étaient mélangées avec des suites ou des intégrales, voir les deux dans 4 sujets sur 6.

Donc:

- *Votre exercice de fonctions fera aussi appel à des notions de suites et/ou d'intégrales.*
- *Votre exercice de probabilités fera aussi appel à des notions de suites et/ou d'intégrales.*

#### **4) Bilan**

Donc, votre sujet (le 7ème) devrait être similaire aux 5 premiers et contenir probablement:

- **un exercice de fonctions (+ suites et/ou intégrales)**
- **un exercice de probabilités (+ suites et/ou intégrales)**
- **un exercice de complexes**
- **un exercice de géométrie dans l'espace**
  
- **en spé, un exercice d'arithmétique, ou de similitudes, ou les deux**
  
- **dans un ou deux des exercices, il y aura une ou deux questions de recherches**
- **un exercice pourra prendre la forme d'un QCM à justifier ou d'une ROC, voire les deux**
  
- **la calculatrice sera autorisée**

## **F) Planning des dernières révisions**

D'après l'analyse précédente, il vous faut donc réviser en priorité:

- **les complexes**
- **la géométrie dans l'espace**
- **les probabilités**
- **le mélange fonctions/suites/intégrales**
- **les questions de recherche**
- **les ROCs**

- Les **complexes**, la **géométrie dans l'espace**, et les **probabilités** sont de grosses parties. Pour les réviser dans leur ensemble, je vous conseille donc de faire les exercices de la **partie IV**. Ce sont essentiellement des QCM, qui vous feront donc réviser rapidement l'ensemble des très nombreuses méthodes de ces parties.
- Pour les **questions de recherche**, vous en trouverez toute la collection dans la **partie III A)**
- Enfin, pour le **mélange fonctions/suites/intégrales**, il faut travailler les exercices correspondants dans les derniers sujets de maths présents dans la **partie II B)**.

Pour le week-end avant le BAC, vous pouvez répartir ça tranquillement sur la soirée du vendredi, la journée du samedi et du dimanche. Planifiez bien pour équilibrer les révisions.

Si le week-end est passé et que vous preniez ce document en cours de route, je vous conseille de vous concentrer essentiellement sur les QCM de la **partie IV**.



## II. Sujets complets

### A) Session 2009 – sujets inédits

#### 1) Polynésie septembre 2009 (*obligatoire*)

#### BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

### MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

### EXERCICE 1 (4 points)

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

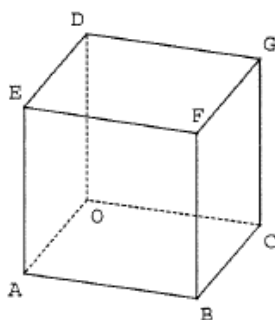
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que  $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$ .

On appelle R le barycentre des points pondérés (B, -1) et (F, 2).

L'espace est muni du repère orthonormal  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ .

1. a) Démontrer que le point R a pour coordonnées (1, 1, 2).  
b) Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.  
c) Quelle est la nature du triangle PQR ?
2. a) Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est  $4x + 2y + z - 8 = 0$ .  
b) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).  
a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).  
b) Déterminer les coordonnées du point H.  
c) Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



## EXERCICE 2 (4 points)

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.

Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention **VRAIE** ou **FAUSSE**.

Pour chaque question, il est compté 1 point si les deux réponses sont exactes, 0,5 point pour une réponse exacte et une absence de réponse et 0 point sinon.

<p><b>Question A</b></p> <p>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les événements :</p> <p>A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».</p>	<p><b>Proposition 1</b></p> <p>La probabilité de A est égale à <math>\frac{3}{7}</math>.</p>	<p><b>Proposition 2</b></p> <p>La probabilité de B est égale à <math>\frac{1}{7}</math>.</p>
<p><b>Question B</b></p> <p>Soient A, B et C trois événements d'un même univers <math>\Omega</math> muni d'une probabilité <math>P</math>. On sait que :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A et B sont indépendants</li> <li><math>P(A) = \frac{2}{5}</math> ; <math>P(A \cup B) = \frac{3}{4}</math> ;</li> <li><math>P(C) = \frac{1}{2}</math> ; <math>P(A \cap C) = \frac{1}{10}</math>.</li> </ul>	<p><b>Proposition 3</b></p> <p><math>P(B) = \frac{7}{12}</math>.</p>	<p><b>Proposition 4</b></p> <p><math>P(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}</math>. <math>\overline{A \cup C}</math> désigne l'événement contraire de <math>A \cup C</math>.</p>
<p><b>Question C</b></p> <p>Une variable aléatoire <math>X</math> suit une loi binomiale de paramètres <math>n</math> et <math>p</math> où <math>n</math> est égal à 4 et <math>p</math> appartient à <math>]0,1[</math>.</p>	<p><b>Proposition 5</b></p> <p>Si <math>P(X=1) = 8P(X=0)</math> alors <math>p = \frac{2}{3}</math>.</p>	<p><b>Proposition 6</b></p> <p>Si <math>p = \frac{1}{5}</math> alors <math>P(X=1) = P(X=0)</math>.</p>
<p><b>Question D</b></p> <p>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire <math>X</math> qui suit la loi exponentielle de paramètre <math>\lambda = 0,07</math> sur <math>[0 ; +\infty[</math>. On rappelle que pour tout <math>t &gt; 0</math>, la probabilité de l'événement <math>(X \leq t)</math> est donnée par :</p> <p><math>P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx</math> (avec <math>\lambda = 0,07</math>).</p>	<p><b>Proposition 7</b></p> <p>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à <math>10^{-2}</math> près.</p>	<p><b>Proposition 8</b></p> <p>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à <math>10^{-2}</math> près.</p>

### EXERCICE 3 (5 points)

Le plan complexe  $P$  est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.  
On appelle  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On appelle  $F$  l'application du plan  $P$  privé du point  $O$  dans  $P$  qui, à tout point  $M$  différent de  $O$ , d'affixe  $z$ , associe le point  $M' = F(M)$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = z + i - \frac{1}{z}$ .

1. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = i$  et  $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$  et leurs images  $A'$  et  $B'$  par  $F$  d'affixes respectives  $a'$  et  $b'$ .
  - a) Calculer  $a'$  et  $b'$ .
  - b) Placer les points  $A, A', B$  et  $B'$ .
  - c) Démontrer que  $\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ .
  - d) En déduire la nature du triangle  $OBB'$ .
2. On recherche l'ensemble  $(E)$  des points du plan  $P$  privé du point  $O$  qui ont pour image par  $F$ , le point  $O$ .
  - a) Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ .
  - b) En déduire les affixes des points de l'ensemble  $(E)$ .
  - c) Démontrer que les points de  $(E)$  appartiennent à  $(\Gamma)$ .
3. Soit  $\theta$  un réel.
  - a) Démontrer que si  $z = e^{i\theta}$  alors  $z' = (2\sin\theta + 1)i$ .
  - b) En déduire que si  $M$  appartient au cercle  $(\Gamma)$  alors  $M'$  appartient au segment  $[A'C]$  où  $C$  a pour affixe  $-i$ .

## EXERCICE 4 (7 points)

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = -nx - x \ln x$ .

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $(C_0)$ ,  $(C_1)$  et  $(C_2)$  représentatives des fonctions  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont données en annexe, page 6.

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ .

**Partie A : Étude de la fonction  $f_0$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_0(x) = -x \ln x$ .**

1. Déterminer la limite de  $f_0$  en  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f_0$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction  $f_n$ ,  $n$  entier naturel.**

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Démontrer que pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f_n'(x) = -n - 1 - \ln x$  où  $f_n'$  désigne la fonction dérivée de  $f_n$ .
2. a) Démontrer que la courbe  $(C_n)$  admet en un unique point  $A_n$  d'abscisse  $e^{-n-1}$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.  
b) Prouver que le point  $A_n$  appartient à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .  
c) Placer sur la figure en annexe les points  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ .
3. a) Démontrer que la courbe  $(C_n)$  coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté  $B_n$ , dont l'abscisse est  $e^{-n}$ .  
b) Démontrer que la tangente à  $(C_n)$  au point  $B_n$  a un coefficient directeur indépendant de l'entier  $n$ .  
c) Placer sur la figure en annexe les points  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ .

**Partie C : Calculs d'aires**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère le domaine du plan  $D_n$  délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $(C_n)$  et les droites d'équation  $x = e^{-n-1}$  et  $x = e^{-n}$ .

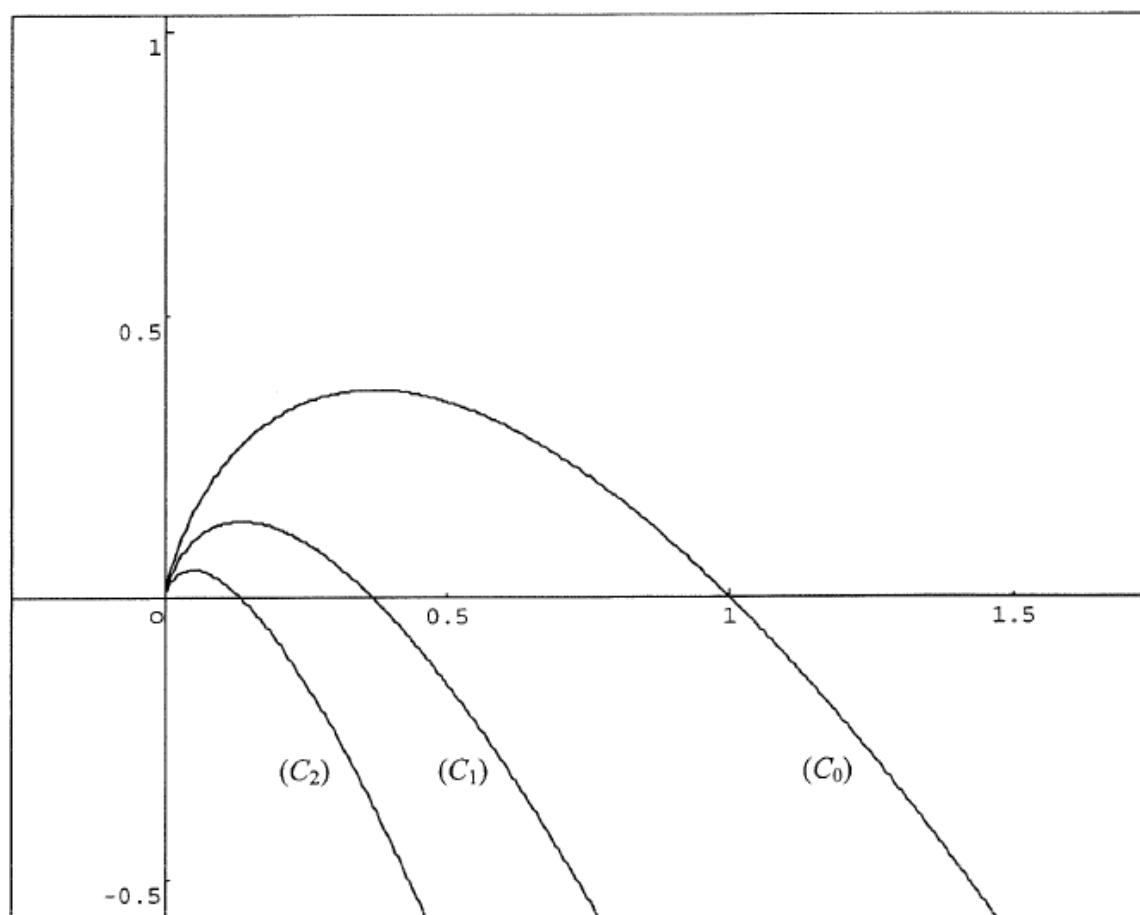
On note  $I_n$  l'aire en unités d'aires du domaine  $D_n$ .

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe page 6, les domaines  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ .
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x \, dx$ .  
b) En déduire que  $I_0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$ .  
c) On admet que le domaine  $D_{n+1}$  est l'image du domaine  $D_n$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{e}$ .  
Exprimer  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $I_0$ .

## ANNEXE

*Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.*

### EXERCICE 4





2) France septembre 2009  
**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

**Session 2009**

**MATHÉMATIQUES**

**Série S**

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 7**

**obligatoire**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.**

**Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.**

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

**09MAOSME3**

**Page 1/6**

### **EXERCICE 1 : (6 points)**

*Commun à tous les candidats*

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ .

#### **PARTIE A**

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .
  - a) Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - b) Montrer que sur l'intervalle  $[2 ; 3]$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution que l'on notera  $\alpha$ . Donner la valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-1}$ .
  - c) Justifier que le nombre réel  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$ .

#### **PARTIE B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

- 1) À partir de  $u_0$ , en utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$ , on a placé  $u_1$  sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes  $u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
- 2) Placer le point  $I$  de la courbe  $\mathcal{C}$  qui a pour abscisse  $\alpha$ .
- 3)
  - a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .
  - b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.
  - c) Déterminer sa limite.

**EXERCICE 2 : (5 points)**

*Commun à tous les candidats*

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1) On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + y - 1 = 0$  et par  $\mathcal{P}'$  le plan d'équation  $y + z - 2 = 0$ .

Justifier que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite  $\mathcal{D}$ , dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

2) a) Déterminer une équation du plan  $\mathcal{R}$  passant par le point  $O$  et orthogonal à la droite  $\mathcal{D}$ .

b) Démontrer que le point  $I$ , intersection du plan  $\mathcal{R}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ , a pour coordonnées  $(0; 1; 1)$ .

3) Soient  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectives  $\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$  et  $(1; 1; 0)$ .

a) Vérifier que les points  $A$  et  $B$  appartiennent au plan  $\mathcal{R}$ .

b) On appelle  $A'$  et  $B'$  les points symétriques respectifs des points  $A$  et  $B$  par rapport au point  $I$ . Justifier que le quadrilatère  $ABA'B'$  est un losange.

c) Vérifier que le point  $S$  de coordonnées  $(2; -1; 3)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

d) Calculer le volume de la pyramide  $SABA'B'$ .

On rappelle que le volume  $V$  d'une pyramide de base d'aire  $b$  et de hauteur  $h$  est :  $V = \frac{1}{3} b \times h$ .

**EXERCICE 3 : (4 points)**

*Commun à tous les candidats*

**PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par  $f(x) = e^x$ .

On appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Soit  $a$  un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $M$  d'abscisse  $a$  coupe l'axe des abscisses au point  $P$  d'abscisse  $a-1$ .
- 2) Soit  $N$  le projeté orthogonal du point  $M$  sur l'axe des abscisses. Démontrer que  $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$ .

**PARTIE B**

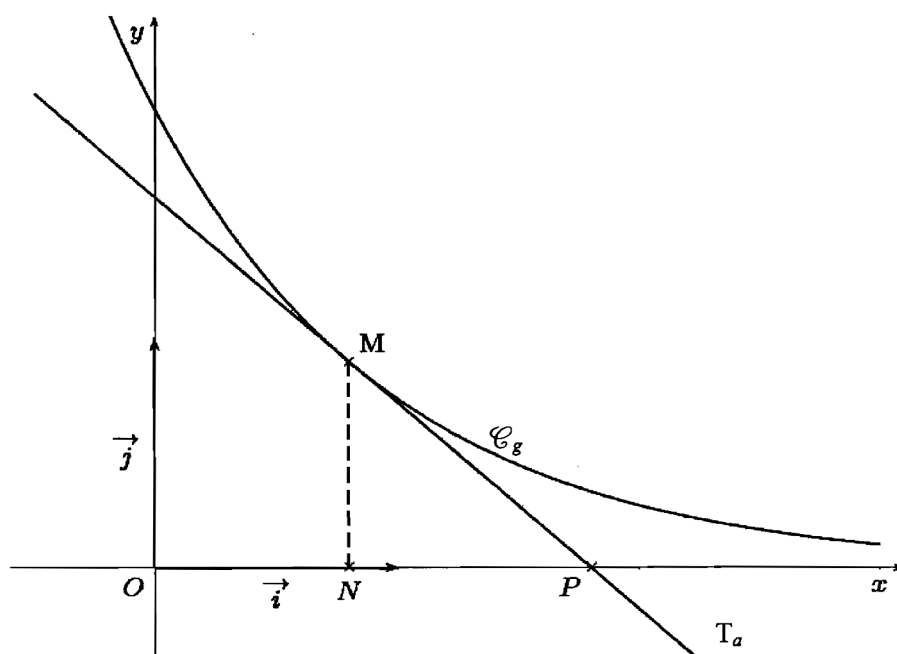
Soit  $g$  une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que  $g'(x) \neq 0$  pour tout nombre réel  $x$ .

On appelle  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $a$  un nombre réel. On considère le point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $a$  et le point  $N$  projeté orthogonal du point  $M$  sur l'axe des abscisses.

Soit  $P$  le point d'intersection de la tangente  $T_a$  à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point  $M$  avec l'axe des abscisses.

Le graphique ci-dessous illustre la situation de la **partie B**



- 1) Démontrer que le point  $P$  a pour coordonnées  $\left(a - \frac{g(a)}{g'(a)}; 0\right)$ .

- 2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il une fonction  $g$  vérifiant  $g(0) = 2$  et  $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$  ?

#### EXERCICE 4 : (5 points)

##### *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

- 1) Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
  - a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
  - b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à  $10^{-3}$ .
- 2) Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à  $10^{-3}$ .
- 3) On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaisson.

On fait l'hypothèse que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

On rappelle que pour tout nombre réel  $k$  positif :  $P(X \leq k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

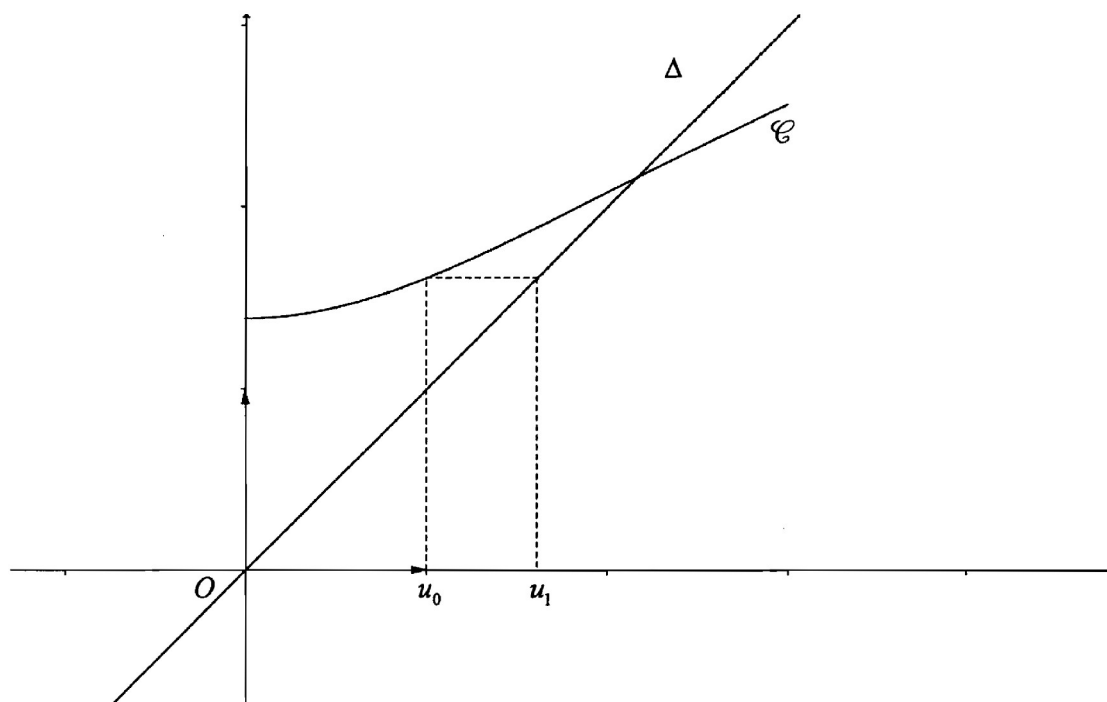
a) Montrer que  $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$ .

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaisson étant égale à  $\frac{1}{4}$ , déterminer la valeur arrondie à  $10^{-4}$  du paramètre  $\lambda$ .

## ANNEXE DE L'EXERCICE 1

(À rendre avec la copie)



# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

## MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**spécialité**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

09MASSME 3

Page 1/6

**EXERCICE 4 : (5 points)**

*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

- 1) a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
- b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{10}$  par 11.
- c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009} + 2009$  par 11.
- 2) On désigne par  $p$  un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul  $n$  le nombre  $A_n = 2^n + p$ .

On note  $d_n$  le PGCD de  $A_n$  et  $A_{n+1}$ .

- a) Montrer que  $d_n$  divise  $2^n$ .
- b) Déterminer la parité de  $A_n$  en fonction de celle de  $p$ . Justifier.
- c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la parité de  $d_n$  en fonction de celle de  $p$ .

En déduire le PGCD de  $2^{2009} + 2009$  et  $2^{2010} + 2009$ .



### 3) Antilles-Guyane septembre 2009

#### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

#### VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

#### PARTIE A

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = (-1)^n$ .

1. La suite  $(u_n)$  est bornée.
2. La suite  $(u_n)$  converge.
3. La suite de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.
4. Toute suite  $(v_n)$  à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

#### PARTIE B

1. Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements indépendants avec  $P(B) \neq 0$  et  $P(B) \neq 1$ , alors  $P(A \cap B) = P_B(A)$ .
2. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0; 1]$ , alors  $P(X \in [0, 1; 0, 6]) = 0,6$ .
3. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et  $\frac{1}{3}$ , alors  $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ .

#### EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1; -1; 4)$ ,  $B(7; -1; -2)$  et  $C(1; 5; -2)$ .

1.
  - a. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
  - b. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.
  - c. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; 1; 1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
  - d. En déduire que  $x + y + z - 4 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Soit  $\mathcal{D}$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -2t \\ y &= -2t - 2 \\ z &= -2t - 3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

- a. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .
  - b. Montrer que les coordonnées du point  $G$ , intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et du plan  $(ABC)$  sont  $(3; 1; 0)$ .
  - c. Montrer que  $G$  est l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
3. Soit  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $G$  passant par  $A$ .

- a. Donner une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite  $\mathcal{D}$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ .

## EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'annexe est à rendre avec la copie

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la surface  $S_1$  d'équation  $z = x^2 + y^2$ , et la surface  $S_2$  d'équation  $z = xy + 2x$ .

### PARTIE A

On note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x = 2$ ,  $E_1$  l'intersection de la surface  $S_1$  et du plan  $\mathcal{P}$  et  $E_2$  l'intersection de la surface  $S_2$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

En annexe, le plan  $\mathcal{P}$  est représenté muni du repère  $(A; \vec{j}, \vec{k})$  où A est le point de coordonnées  $(2; 0; 0)$ .

1.
  - a. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_1$ .
  - b. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_2$ .
2.
  - a. Représenter les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sur la feuille **annexe**.
  - b. Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .

### PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :

« soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers avec  $a$  premier. Si  $a$  divise  $bc$  alors  $a$  divise  $b$  ou  $a$  divise  $c$ . »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection  $M(x; y; z)$  des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  où  $y$  et  $z$  sont des entiers relatifs et  $x$  un nombre premier.

On considère un tel point  $M(x; y; z)$ .

1.
  - a. Montrer que  $y(y - x) = x(2 - x)$ .
  - b. En déduire que le nombre premier  $x$  divise  $y$ .
2. On pose  $y = kx$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - a. Montrer que  $x$  divise 2, puis que  $x = 2$ .
  - b. En déduire les valeurs possibles de  $k$ .
3. Déterminer les coordonnées possibles de  $M$  et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

## EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -11 + 4i, \quad z_B = -3 - 4i \quad \text{et} \quad z_C = 5 + 4i.$$

2. Calculer le module et un argument du quotient  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l'image du point C par la rotation  $\mathcal{R}$  de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
Montrer que l'affixe de E vérifie  $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$ .  
Placer le point E.
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie  $\mathcal{H}$  de centre B et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.  
Placer le point D.
5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Soit  $\mathcal{D}$  la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].  
Montrer que B, I et J sont alignés.

#### EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; 1]$  par :

$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ .

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$T$  est la droite d'équation  $y = x$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $T$  sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1.
  - a. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
  - b. En utilisant le signe de  $x \ln x$  sur  $]0 ; 1]$ , montrer que, pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$ , on a  $f(x) \leq 1$ .
2.
  - a. Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$ .
  - b. Vérifier que la droite  $T$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.
3. On note  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$  par

$$g(x) = 1 + x \ln x - x.$$

- a. Étudier les variations de  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  et dresser le tableau de variation de  $g$ .  
On ne cherchera pas la limite de  $g$  en 0.
  - b. En déduire les positions relatives de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $T$ .
4. Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ .

$$\text{On pose } I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [1 - f(x)] dx.$$

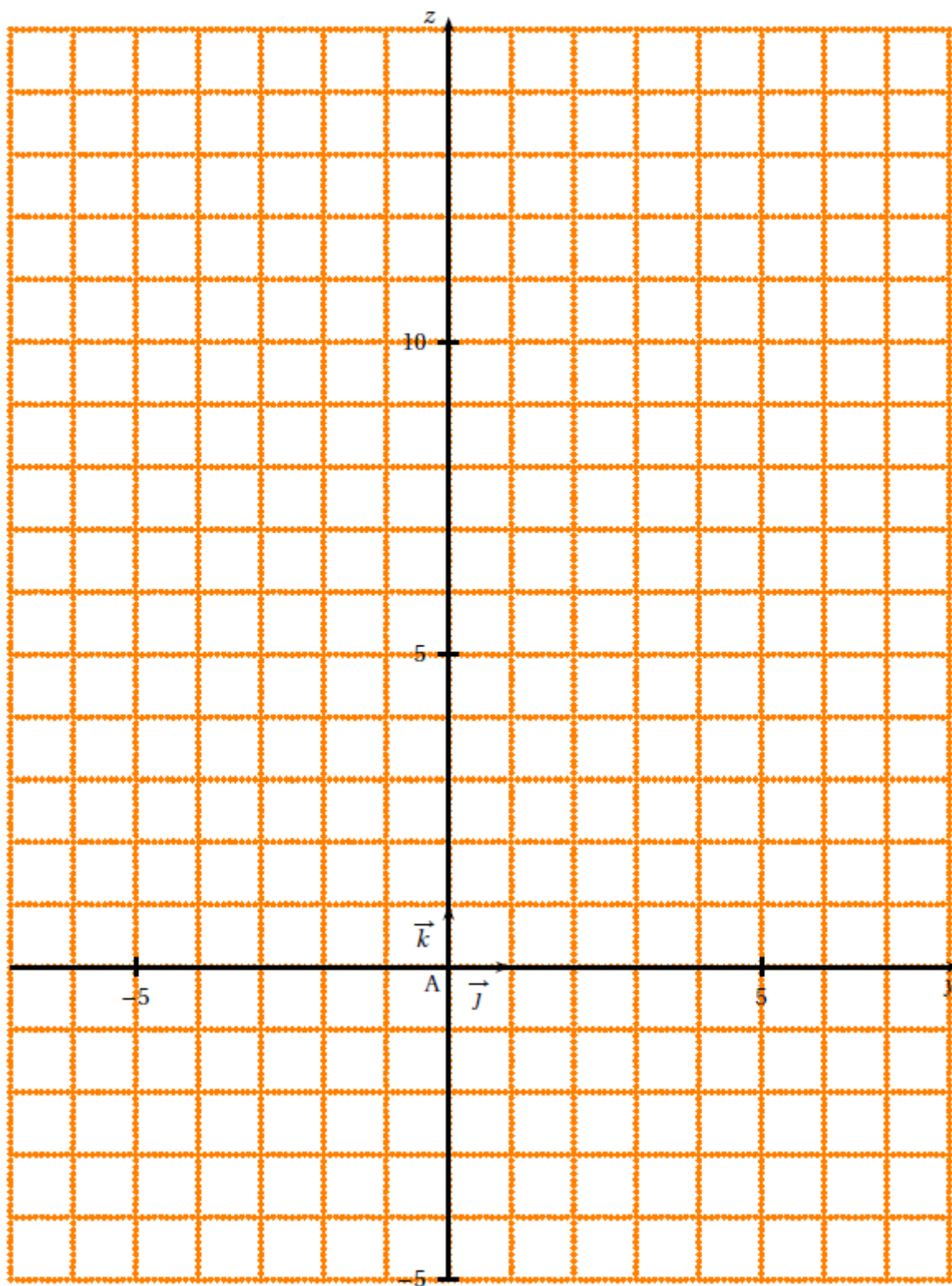
- a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$ .
- b. Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$ .
- c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
- d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $T$  et l'axe des ordonnées.

# ANNEXE

## Exercice 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie



#### 4) Nouvelle Calédonie novembre 2009

##### EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

1.
  - a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b. Calculer  $f'(x)$  et déterminer le tableau de variations de  $f$ .
  - c. En déduire le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour tout nombre réel  $a$ , on considère l'intégrale :  $I(a) = \int_0^a f(x) dx$ .
  - a. Donner selon les valeurs de  $a$  le signe de  $I(a)$ .
  - b. À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel  $a$  :

$$I(a) = 2 - 2e^{-a} \left( 1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

- c. En déduire pour tout nombre réel  $a$  :

$$\frac{1}{2} e^a I(a) = e^a - \left( 1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

3. Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x$  et  $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $g$  et  $\mathcal{D}$  celle de  $h$ .

- a. Montrer que les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ont la même tangente au point d'abscisse 0.
- b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

##### EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'évènement :

- $T_n$  : « le manchot utilise le toboggan lors de son  $n$ -ième passage. »
- $P_n$  : « le manchot utilise le plongoir lors de son  $n$ -ième passage. »

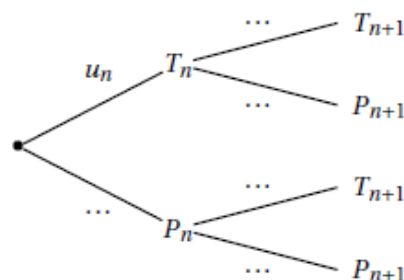
On considère alors la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$u_n = p(T_n)$$

où  $p(T_n)$  est la probabilité de l'évènement  $T_n$ .



1. a. Donner les valeurs des probabilités  $p(T_1)$ ,  $p(P_1)$  et des probabilités conditionnelles  $p_{T_1}(T_2)$ ,  $p_{P_1}(T_2)$ .
- b. Montrer que  $p(T_2) = \frac{1}{4}$ .
- c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



- d. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$ .
  - e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

- a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ . Préciser son premier terme.
- b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

## EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

- a. Déterminer un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tels que  $3u + 7v = 1$ .  
En déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de l'équation (E).
- b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

- a. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .  
Démontrer que si  $(x; y)$  est solution de (G) alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .
- b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

- c. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.  
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

### EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

- Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
- Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(2; 1; 1)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{IK}$  et à  $\overrightarrow{IJ}$ .  
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est :  $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ .
- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
  - En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées  $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$ .
  - Placer le point R sur la figure.
- Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
- Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .
  - Soit  $\mathcal{S}$  la sphère de centre G passant par F.  
Justifier que la sphère  $\mathcal{S}$  et le plan (IJK) sont sécants.  
Déterminer le rayon de leur intersection.

### EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = 2i$ .

- Écrire  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
  - Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
  - Déterminer la nature du triangle OAB.
- On note  $r$  la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe  $z$ , on note  $M'$  l'image de M par  $r$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ .
  - Calculer un argument du quotient  $\frac{z_B}{z_A}$ . Interpréter géométriquement ce résultat.
  - En déduire l'écriture complexe de la rotation  $r$ .
- Soient  $\Gamma$  le cercle de centre A passant par O et  $\Gamma'$  le cercle de centre B passant par O.  
Soit C le deuxième point d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (autre que O). On note  $z_C$  son affixe.
  - Justifier que le cercle  $\Gamma'$  est l'image du cercle  $\Gamma$  par la rotation  $r$ .
  - Calculer l'affixe  $z_I$  du milieu I de [AB].
  - Déterminer la nature du quadrilatère OACB.
  - En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

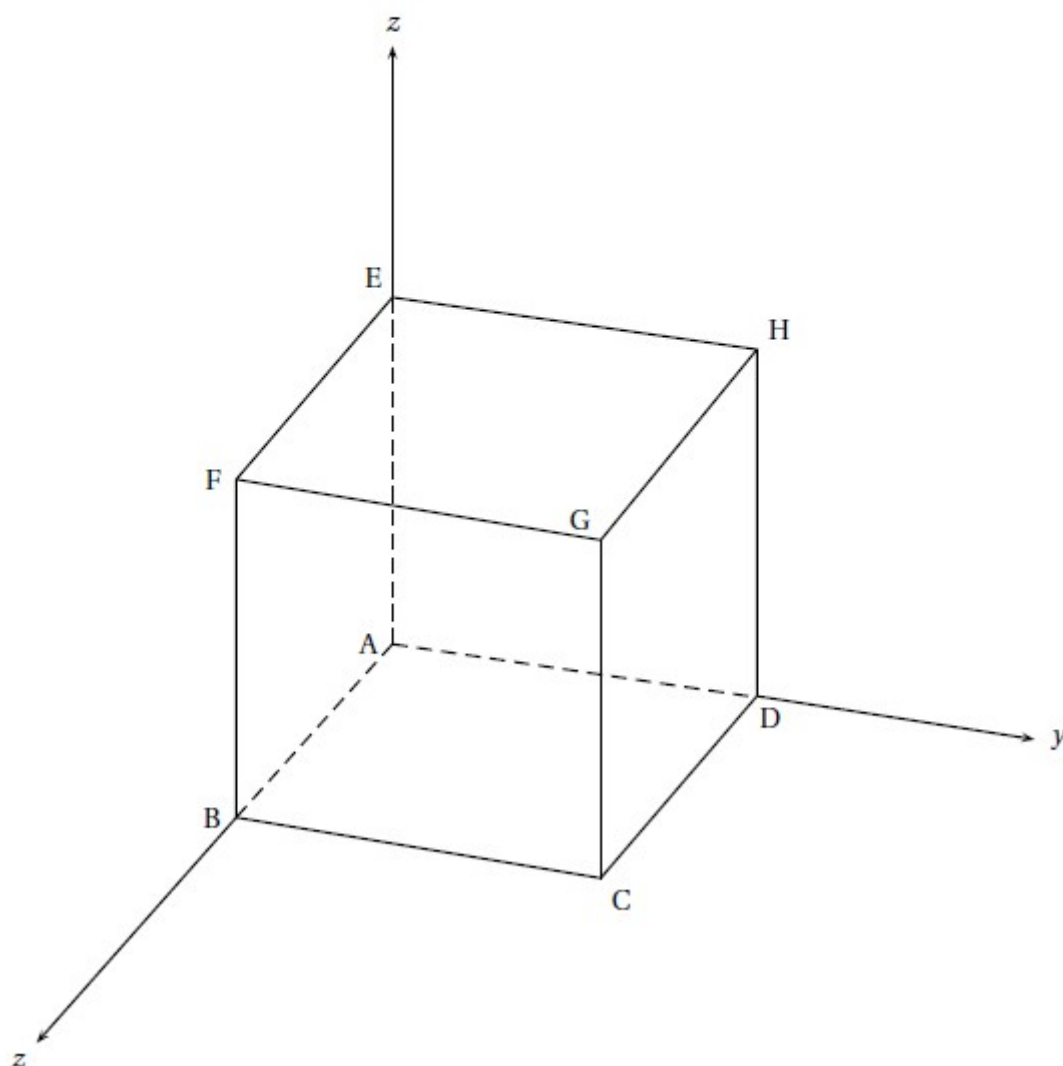
4. Soit D le point d'affixe  $z_D = 2i\sqrt{3}$ .
- Justifier que le point D appartient au cercle  $\Gamma$ . Placer D sur la figure.
  - Placer D' image de D par la rotation  $r$  définie à la question 2.  
On note  $z_{D'}$  l'affixe de D'.  
Montrer que  $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$ .
5. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{DD'}$  sont colinéaires. Que peut-on en déduire?

ANNEXE

### Exercice 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie





5) Amérique du Sud novembre 2009

EXERCICE 1 \_\_\_\_\_ (6 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit  $D$  le point de coordonnées  $(x_D, y_D, z_D)$  et  $P$  le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des réels qui ne sont pas tous nuls. Démontrer que la distance du point  $D$  au plan  $P$  est donnée par :

$$d(D, P) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

On considère les points  $A$  de coordonnées  $(3; -2; 2)$ ,  $B$  de coordonnées  $(6; -2; -1)$ ,  $C$  de coordonnées  $(6; 1; 5)$  et  $D$  de coordonnées  $(4; 0; -1)$ .

1. Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle. En déduire l'aire du triangle  $ABC$ .
2. Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(1; -2; 1)$  est normal au plan  $(ABC)$ .  
Déterminer une équation du plan  $(ABC)$ .
3. Calculer la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$ .  
Déterminer le volume du tétraèdre  $ABCD$ .

Partie C

Soit  $Q$  le plan d'équation  $x - 2y + z - 5 = 0$ .

1. Déterminer la position relative des deux plans  $Q$  et  $(ABC)$ .
2.  $Q$  coupe les droites  $(DA)$ ,  $(DB)$  et  $(DC)$  respectivement en  $E$ ,  $F$  et  $G$ .  
Déterminer les coordonnées de  $E$  et montrer que  $E$  appartient au segment  $[DA]$ .
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Déterminer le volume du tétraèdre  $EFGD$ .

**EXERCICE 2 \_\_\_\_\_ (5 points)****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et  $(-2)$  et on définit l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  et différent de A associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}.$$

1.
  - a. Déterminer l'affixe du point  $P'$  image par  $f$  du point  $P$  d'affixe  $(1+i)$ .
  - b. Montrer que les droites  $(AP)$  et  $(BP')$  sont parallèles.
  - c. Établir que les droites  $(AP)$  et  $(PP')$  sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$  (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que  $M'=M$ ).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image  $M'$  d'un point  $M$  quelconque du plan.

3.
  - a. Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ , le nombre  $(z-2)(\bar{z}-2)$  est réel.
  - b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2,  $\frac{z'+2}{z-2}$  est réel.
  - c. Montrer que les droites  $(AM)$  et  $(BM')$  sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Soit  $M$  un point quelconque non situé sur la droite  $(AB)$ . Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit  $M$  un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point  $M'$  image de  $M$  par  $f$ . Réaliser une figure pour le point  $Q$  d'affixe  $3-2i$ .

**EXERCICE 2 \_\_\_\_\_ (5 points)****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que  $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ .

$\Gamma_1$  désigne le cercle de diamètre  $[AI]$  et  $\Gamma_2$  désigne le cercle de diamètre  $[BK]$ .

**Partie A**

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe  $s$  telle que  $s(A) = I$  et  $s(B) = K$ .

2. Montrer que les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent en deux points distincts : le point  $J$  et le centre  $\Omega$  de la similitude directe  $s$ .
3. a. Déterminer les images par  $s$  des droites  $(AC)$  et  $(BC)$ . En déduire l'image du point  $C$  par  $s$ .  
b. Soit  $E$  l'image par  $s$  du point  $I$ . Démontrer que  $E$  est le milieu du segment  $[ID]$ .
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Démontrer que les points  $A$ ,  $\Omega$  et  $E$  sont alignés.  
(On pourra considérer la transformation  $t = s \circ s$ ).

### Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct  $\left(A; \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$ .

1. Donner les affixes des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
2. Démontrer que la similitude directe  $s$  a pour écriture complexe

$$z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i.$$

3. Calculer l'axe  $\omega$  du centre  $\Omega$  de  $s$ .
4. Calculer l'axe  $z_E$  du point  $E$  et retrouver l'alignement des points  $A$ ,  $\Omega$  et  $E$ .
5. Démontrer que les droites  $(AE)$ ,  $(CL)$  et  $(DJ)$  sont concourantes au point  $\Omega$ .

### EXERCICE 3 \_\_\_\_\_ (5 points)

#### Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left( \frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

1. a. Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .  
b. Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a  $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ .
2. Soit  $J$  et  $K$  les intégrales définies par  $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx$  et  $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ .  
a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que  $J = 3 - \frac{4}{e}$ .  
b. Utiliser un encadrement de  $f(x)$  obtenu précédemment pour démontrer que  $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$ .  
c. Démontrer que  $J + K = 4I$ .  
d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de  $I$ , puis donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $I$ .

## EXERCICE 4 \_\_\_\_\_ (4 points)

### Commun à tous les candidats

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites ( $A$ ,  $B$  et  $C$ ), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot «  $BBAAC$  » signifie que le candidat a répondu  $B$  aux première et deuxième questions,  $A$  aux troisième et quatrième questions et  $C$  à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?  
b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

$E$  : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

$F$  : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

$G$  : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «  $BACAB$  » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par  $X$  le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

- a. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 28$  et  $p = \frac{32}{243}$ .
- b. Calculer la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

**B) Session 2010 – premiers sujets**

**1) Inde avril 2010**

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

SESSION 2010

**MATHÉMATIQUES**

Série : S

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures – COEFFICIENT : 7**

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,  
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.



## Exercice 1 (6 points)

### Commun à tous les candidats

#### Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ .
- Si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

Montrer que : si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

#### Partie B

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$  et on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ .

On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .  
b. Étudier les variations de  $f_1$  sur  $[0, +\infty[$ .  
c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$  et interpréter graphiquement le résultat.

(Pour le calcul de  $I_1$ , on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ .)

2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $0 \leq I_n \leq \ln 2$ .  
b. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .  
c. En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

3. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1 + x) - x$ .

a. Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0, +\infty[$ .

b. En déduire le signe de  $g$  sur  $[0, +\infty[$ .

Montrer alors que pour tout entier naturel  $n$  non nul, et pour tout  $x$  réel positif, on a

$$\ln(1 + x^n) \leq x^n.$$

c. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

## Exercice 2 (5 points)

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$  est parallèle au plan dont une équation cartésienne est :  $x + 2y + z - 3 = 0$ .
2. Les plans  $P, P', P''$  d'équations respectives  $x - 2y + 3z = 3$ ,  $2x + 3y - 2z = 6$  et  $4x - y + 4z = 12$  n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$  et  $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbf{R}$  sont sécantes.
4. On considère les points :  $A$ , de coordonnées  $(-1, 0, 2)$ ,  $B$ , de coordonnées  $(1, 4, 0)$ , et  $C$ , de coordonnées  $(3, -4, -2)$ .  
Le plan  $(ABC)$  a pour équation  $x + z = 1$ .
5. On considère les points :  $A$ , de coordonnées  $(-1, 1, 3)$ ,  $B$ , de coordonnées  $(2, 1, 0)$ , et  $C$ , de coordonnées  $(4, -1, 5)$ .  
On peut écrire  $C$  comme barycentre des points  $A$  et  $B$ .

### Exercice 3 (5 points)

#### Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et  $n$  boules rouges,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que :  $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$ .

- b. Calculer, en fonction de  $n$ , la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable  $X$ .

- c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

- d. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier  $n$  afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que  $n = 1000$ . L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire  $Z$  suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, P(Z \leq k) = \int_0^k 0,01 e^{-0,01x} dx.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

- a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit  $P(Z \leq 50)$ .
- b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : "le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche" sachant l'évènement "le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche".



### Exercice 4 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ .

b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .

c. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ .

a. Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{25}{4} \left( \frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ .

c. Soit la somme  $S_n$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 9

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5,*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements.*

Tournez la page S.V.P.

## Exercice 2 (5 points)

### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

#### Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3.$$

Soit  $(a, b)$  un tel couple et  $d = \text{PGCD}(a, b)$ . On note  $u$  et  $v$  les entiers tels que  $a = du$  et  $b = dv$ .

1. Montrer que  $u^2 = dv^3$ .
2. En déduire que  $v$  divise  $u$ , puis que  $v = 1$ .
3. Soit  $(a, b)$  un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a  $a^2 = b^3$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que si  $n$  est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors  $n \equiv 0 [7]$  ou  $n \equiv 1 [7]$ .

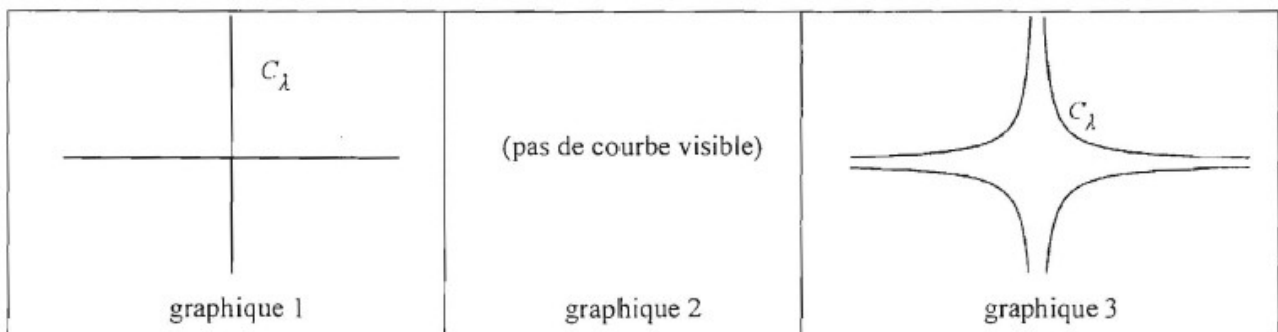
#### Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la surface  $S$  d'équation  $x^2 \times y^2 = z^3$ .

Pour tout réel  $\lambda$ , on note  $C_\lambda$  la section de  $S$  par le plan d'équation  $z = \lambda$ .

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de  $C_\lambda$ , tracée dans le plan d'équation  $z = \lambda$ , selon le signe de  $\lambda$ .

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants :  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ , et justifier l'allure de chaque courbe.



2. a. Déterminer le nombre de points de  $C_{25}$  dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.  
b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.  
Déterminer le nombre de points de  $C_{2010}$  dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

**2) Amérique du Nord juin 2010**

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

**Session 2010**

**MATHÉMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

### Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : A(1, -2, 4) B(-2, -6, 5) C(-4, 0, -3).

1.
  - a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - b) Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(1, -1, -1)$  est un vecteur normal au plan (ABC).
  - c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2.
  - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
  - b) Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).  
Soit  $t$  le réel tel que  $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ .
  - a) Démontrer que  $t = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$ .
  - b) En déduire le réel  $t$  et les coordonnées du point H.

## Exercice 2 (3 points)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à  $\frac{2}{7}$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue  $n$  tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a) Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des  $n$  tirages.

b) Déterminer l'entier  $n$  à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des  $n$  tirages est supérieure ou égale à 0,99.



### Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe  $i$ , B d'affixe  $-2i$  et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit  $f$  l'application qui à tout point M d'affixe  $z$  ( $z \neq i$ ) associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$ .
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application  $f$ .
3. a) Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $i$ ,  $(z' + 2i)(z - i) = 1$ .  
b) En déduire que pour tout point M d'affixe  $z$  ( $z \neq i$ ) :  
 $BM' \times AM = 1$   
et  $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$  où  $k$  est un entier relatif.
4. a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$ .  
b) En utilisant les résultats de la question 3b), placer le point E' associé au point E par l'application  $f$ . On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

#### Exercice 4 (8 points)

À tout entier naturel  $n$  non nul, on associe la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par  $C_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont données en annexe page 6.

**Partie A :** Étude de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$ .

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$ .
2. a) Démontrer que la courbe  $C_1$  admet deux asymptotes dont on précisera des équations.  
b) Démontrer que la fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .  
c) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $0 < f_1(x) < 4$ .
3. a) Démontrer que le point  $I_1$  de coordonnées  $(\ln 7, 2)$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_1$ .  
b) Déterminer une équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $C_1$  au point  $I_1$ .  
c) Tracer la droite  $(T_1)$ .
4. a) Déterminer une primitive de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbf{R}$ .  
b) Calculer la valeur moyenne de  $f_1$  sur l'intervalle  $[0, \ln 7]$ .

**Partie B :** Étude de certaines propriétés de la fonction  $f_n$ .

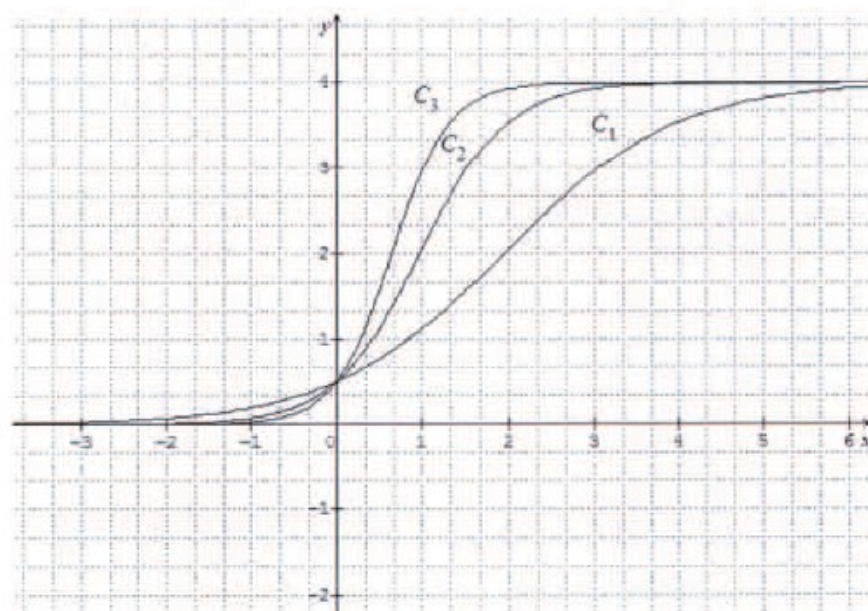
1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul le point  $A \left(0, \frac{1}{2}\right)$  appartient à la courbe  $C_n$ .
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul la courbe  $C_n$  et la droite d'équation  $y = 2$  ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.  
On note  $I_n$  ce point d'intersection.  
b) Déterminer une équation de la tangente  $(T_n)$  à la courbe  $C_n$  au point  $I_n$ .  
c) Tracer les droites  $(T_2)$  et  $(T_3)$ .
3. Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_n(x) dx$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante.



## ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

### Exercice 4



# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

## MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

***Le candidat doit traiter les quatre exercices.***

***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***

***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

### Exercice 3 (5 points)

#### Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  solutions de l'équation (E) :  $16x - 3y = 4$ .

1. Vérifier que le couple  $(1, 4)$  est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

#### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la transformation  $f$  du plan, qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} z$ .

On définit une suite de points  $(M_n)$  de la manière suivante :

le point  $M_0$  a pour affixe  $z_0 = i$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = f(M_n)$ .

On note  $z_n$  l'affixe du point  $M_n$ .

Les points  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

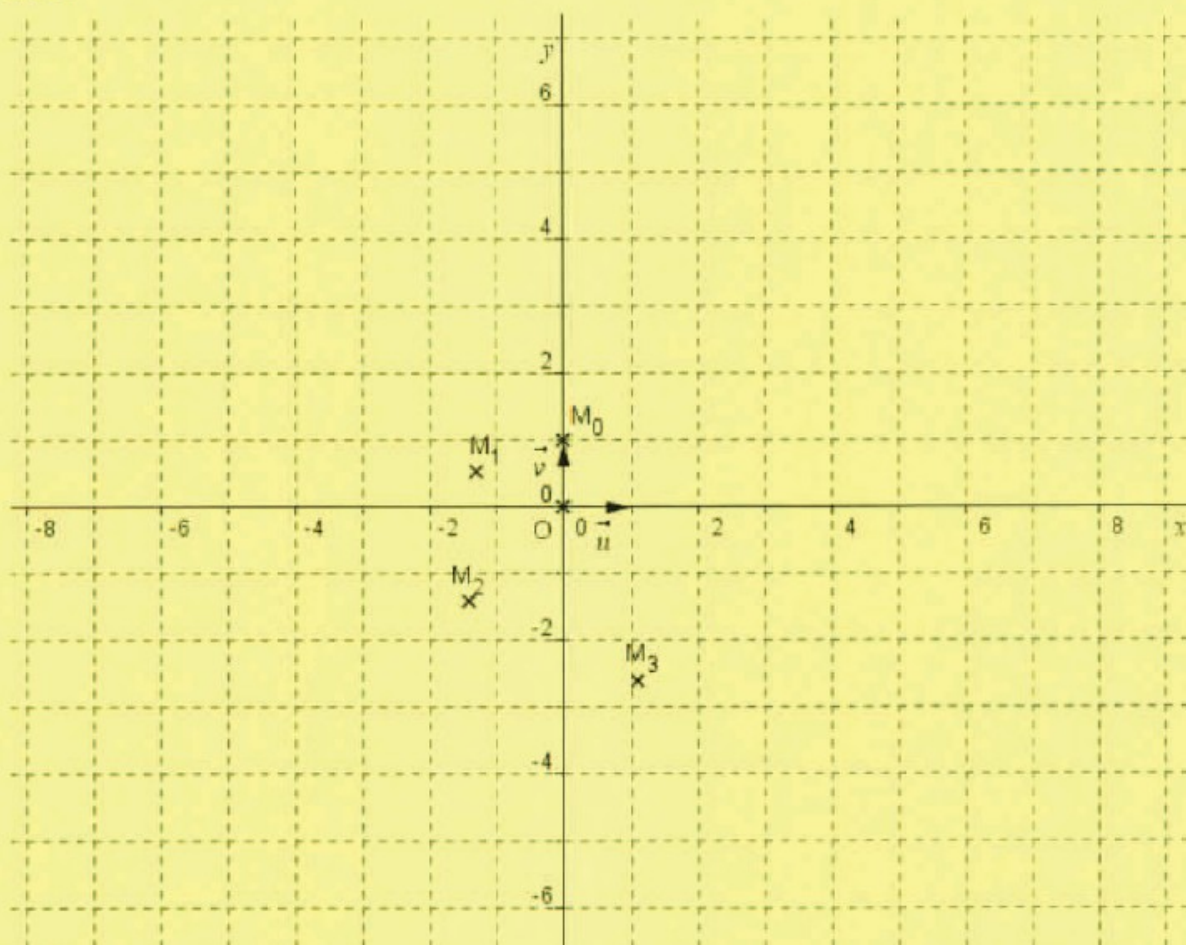
1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$ .
2. On note  $g$  la transformation  $f \circ f \circ f \circ f$ .
  - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $OM_{n+4} = 4 OM_n$  et que  $(\overline{OM_n}, \overline{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$  où  $k$  est un entier relatif.
  - c) Compléter la figure en construisant les points  $M_4$ ,  $M_5$  et  $M_6$ .
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8})}$ .
4. Soient deux entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $p \leq n$ .
  - a) Exprimer en fonction de  $n$  et  $p$  une mesure de  $(\overline{OM_p}, \overline{OM_n})$ .
  - b) Démontrer que les points  $O$ ,  $M_p$  et  $M_n$  sont alignés si et seulement si  $n-p$  est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que le point  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $[Ox)$ . On pourra utiliser la partie A.



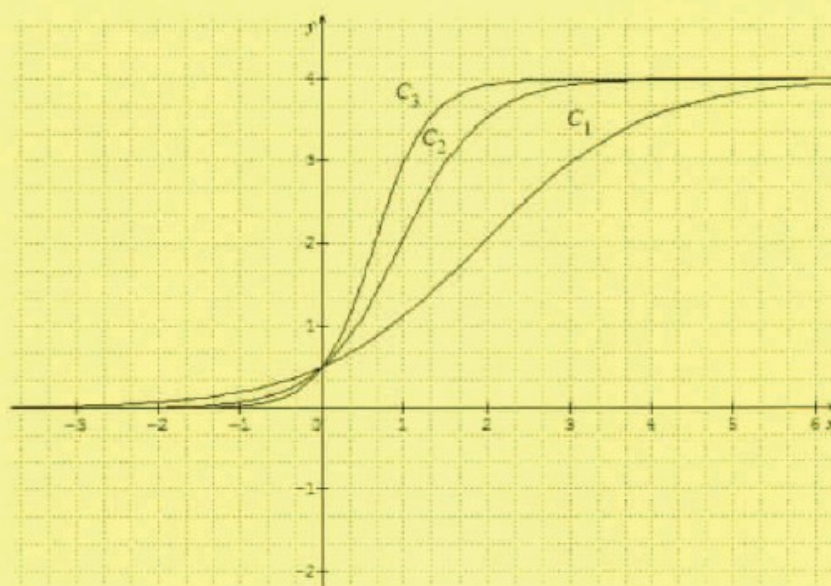
## ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

### Exercice 3



### Exercice 4



**3) Liban juin 2010**  
**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

**Session 2010**

**MATHÉMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

***Le candidat doit traiter les quatre exercices.***

***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***

***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

## EXERCICE 1 (5 points)

### Partie A

#### Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$ .
- Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^x \times e^y = e^{x+y}$ .

1. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $(e^x)^n = e^{nx}$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ .

1. a) Montrer que  $u_0 + u_1 = 1$ .  
b) Calculer  $u_1$ . En déduire  $u_0$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .
3. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$ .  
b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## EXERCICE 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On note (D) la droite passant par les points A  $(1, -2, -1)$  et B  $(3, -5, -2)$ .

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbf{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation  $4x + y + 5z + 3 = 0$ .

a) Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b) Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite ( $\Delta$ ) passant par le point C et de vecteur directeur  $\vec{w}(1, 1, -1)$ .

a) Montrer que les droites ( $\Delta$ ) et (D') sont perpendiculaires.

b) Montrer que la droite ( $\Delta$ ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

### EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

**Proposition 1 :** « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est  $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$ . »

2. Une variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

On rappelle que pour tout réel  $a > 0$  :  $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$ .

**Proposition 2 :** « Le réel  $a$  tel que  $p(X > a) = p(X \leq a)$  est égal à  $\frac{\ln 2}{\lambda}$ . »

3. Soit le nombre complexe  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3 :** « Si l'entier naturel  $n$  est un multiple de 3 alors  $z^n$  est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , le point A d'affixe  $a = 2 - i$  et le point B d'affixe  $b = \frac{1+i}{2}a$ .

**Proposition 4 :** « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , à tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle on associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que  $z' = \frac{-10}{\bar{z}}$  où  $\bar{z}$  désigne le nombre conjugué de  $z$ .

**Proposition 5 :** « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »



## EXERCICE 4 (6 points)

### Partie A

Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$ .

1. Étudier les variations de  $u$  sur  $]0, +\infty[$  et préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

2. a) Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique sur  $]0, +\infty[$ .

On note  $\alpha$  cette solution.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

3. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

4. Montrer l'égalité :  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

1. Exprimer, pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$ .

2. En déduire les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

### Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on note :

- $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$  (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées  $(0, 2)$  ;
- M le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ .

1. Montrer que la distance AM est donnée par  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

a) Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations sur  $]0, +\infty[$ .

b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de  $\Gamma$ , noté P, dont on précisera les coordonnées.

c) Montrer que  $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ .

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en P ?

### EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , le point A d'affixe  $2 - i$  et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
On note I le milieu du segment [AB].

**Proposition 1 :** « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe  $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$ . »

2. On appelle S l'ensemble des couples  $(x, y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation  $3x - 5y = 2$ .

**Proposition 2 :** « L'ensemble S est l'ensemble des couples  $(5k - 1, 3k - 1)$  où  $k$  est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) :  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , où  $(x, y)$  est un couple d'entiers relatifs.

**Proposition 3 :** « Il existe des couples  $(x, y)$  d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

**Proposition 4 :** « Pour tout entier naturel  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ), le nombre  $n! + k$  n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E') :  $x^2 - 52x + 480 = 0$ , où  $x$  est un entier naturel.

**Proposition 5 :** « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »

**4) Polynésie juin 2010**  
**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

**Session 2010**

**MATHÉMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

### Partie A – Restitution organisée de connaissances

#### Prérequis

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + bi$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

On note  $\bar{z}$ , le nombre complexe défini par  $\bar{z} = a - bi$ .

#### Questions

- Démontrer que, pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$ ,  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ .
- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout nombre complexe  $z$ ,  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .

### Partie B

On considère l'équation (E) :  $z^4 = -4$  où  $z$  est un nombre complexe.

- Montrer que si le nombre complexe  $z$  est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes  $-z$  et  $\bar{z}$  sont aussi solutions de l'équation (E).
- On considère le nombre complexe  $z_0 = 1 + i$ .
  - Écrire le nombre complexe  $z_0$  sous forme exponentielle.
  - Vérifier que  $z_0$  est solution de l'équation (E).
- Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

### Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, z_B = -1 + i, z_C = -1 - i \text{ et } z_D = 1 - i.$$

Soit  $r$  la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{3}$ .

On appelle E l'image du point B par  $r$  et F celle du point D par  $r$ .

- Déterminer l'écriture complexe de la rotation  $r$ .
- Démontrer que l'axe du point E, notée  $z_E$ , est égale à  $-1 + \sqrt{3}$ .
  - Déterminer l'axe  $z_F$  du point F.
  - Démontrer que le quotient  $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$  est un réel.
  - Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

## EXERCICE 2 (3 points)

Des robots se trouvent au centre de gravité  $O$  d'un triangle de sommets  $S$ ,  $I$  et  $X$ .

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets  $S$ ,  $I$  ou  $X$  puis il rejoint le point  $O$  ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet  $S$  est égale à celle de passer par le sommet  $X$  et la probabilité de passer par le sommet  $S$  est le double de celle de passer par le sommet  $I$  ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres.
- on ne tient pas compte des passages par le point  $O$ .

### Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point  $O$ .

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet  $I$  est égale

$$\text{à } \frac{1}{5}.$$

2. On note  $E$  l'événement :

« au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets  $S$ ,  $I$ ,  $X$  dans cet ordre ».

Démontrer que la probabilité de  $E$  est égale à  $\frac{4}{125}$ .

3. On note  $F$  l'événement :

« au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les sommets  $S$ ,  $I$ ,  $X$  dans un ordre quelconque ».

Déterminer la probabilité de  $F$ .

### Partie B – Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point  $O$ , leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal  $n$  de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement « au moins l'un de ces robots passe successivement par les sommets  $S$ ,  $I$ ,  $X$  dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

### EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- les points A (1, 1, 1) et B (3, 2, 0) ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation  $x - y + 2z + 4 = 0$  ;
- la sphère (S) de centre le point A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est :  $2x + y - z - 8 = 0$ .

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. a) Calculer la distance du point A au plan (Q) .

En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0, 2, -1).

a) Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q) .

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).

d) On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».

Justifier la réponse.

## EXERCICE 4 (7 points)

L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

### Partie A

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$ .
  - a) Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.  
Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $[1, +\infty[$  une unique solution notée  $\alpha$ .
  - b) Démontrer que  $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$ .
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$ .  
On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe d'équation  $y = \ln(2x) + 1$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Cette courbe est donnée en annexe page 6.
  - a) En utilisant la courbe  $(\Gamma)$ , construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
  - b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ .
  - c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = (x-1)e^{1-x}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Cette courbe est donnée en annexe page 6.

1. Pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t} dt$$

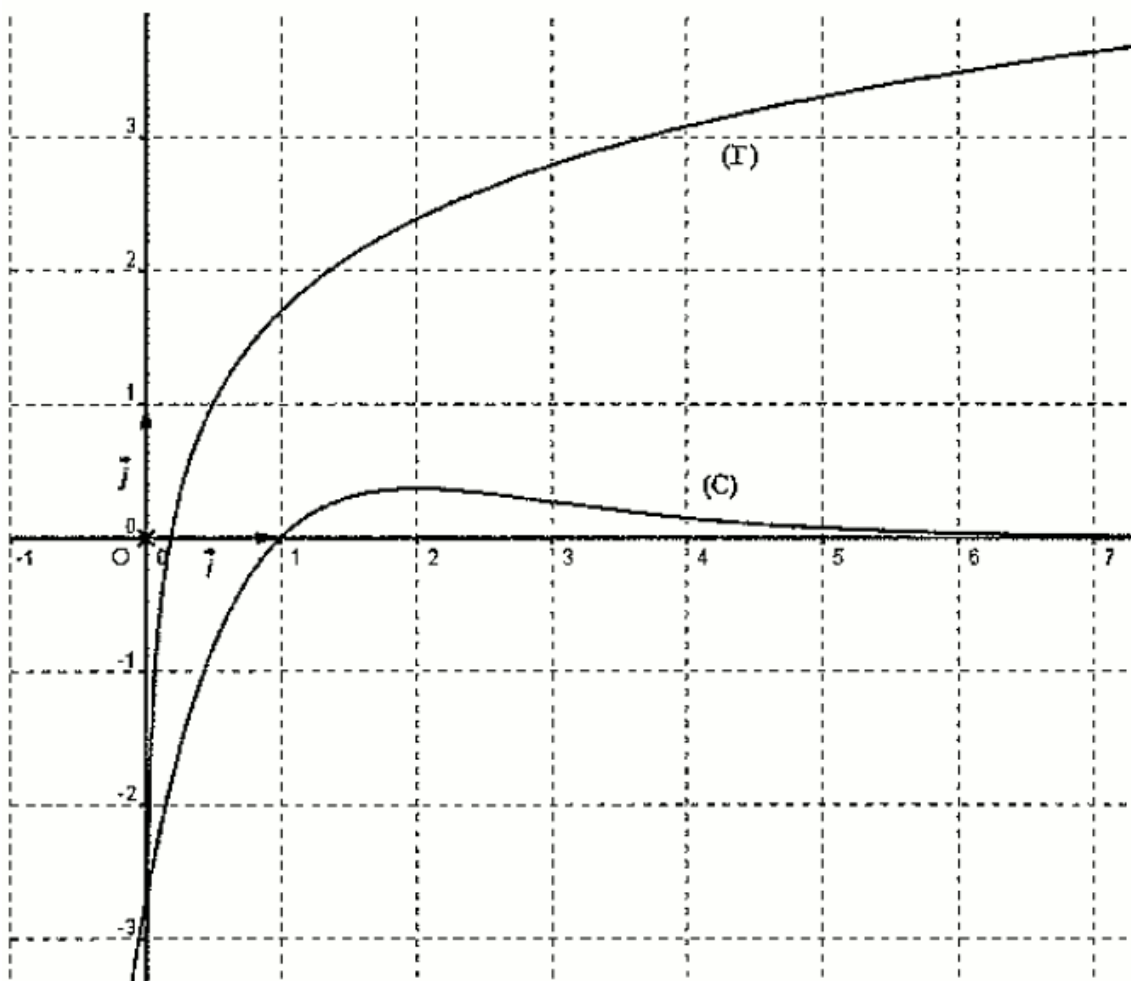
- a) Démontrer que la fonction  $F$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ .
  - b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[1, +\infty[$ ,  $F(x) = -xe^{1-x} + 1$ .
  - c) Démontrer que sur  $[1, +\infty[$ , l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  est équivalente à l'équation  $\ln(2x) + 1 = x$ .
2. Soit un réel  $a$  supérieur ou égal à 1. On considère la partie  $D_a$  du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = a$ .  
Déterminer  $a$  tel que l'aire, en unités d'aire, de  $D_a$  soit égale  $\frac{1}{2}$  et hachurer  $D_a$  sur le graphique.



## ANNEXE

*Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.*

### EXERCICE 4





# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

## MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

### EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

#### Partie A

On considère l'équation (E) :  $7x - 6y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

#### Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples  $(n, m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :  $7^n - 3 \times 2^m = 1$  (F).

1. On suppose  $m \leq 4$ .  
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que  $m \geq 5$ .
  - a) Montrer que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ .
  - b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $n$  est divisible par 4.
  - c) En déduire que si le couple  $(n, m)$  vérifie la relation (F) alors  $7^n \equiv 1 \pmod{5}$ .
  - d) Pour  $m \geq 5$ , existe-t-il des couples  $(n, m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

## 5) Centres étrangers juin 2010

### Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

#### Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Affirmation :*

Les droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  sont orthogonales.

#### Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point  $A$  de coordonnées  $(2; -1; 3)$  et la droite  $(\mathcal{D})$  de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Affirmation :*

Le plan  $(\mathcal{P})$  contenant le point  $A$  et orthogonal à la droite  $(\mathcal{D})$  a pour équation :  $2x + y - z = 0$ .

#### Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0003$ .

On rappelle que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

*Affirmation :*

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est inférieure à 0,5.

#### Question 4

$A$  et  $B$  sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0,4, \quad p_A(B) = 0,7, \quad \text{et} \quad p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1.$$

*Affirmation :*

La probabilité de l'événement  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé est égale à  $\frac{14}{41}$ .

**Exercice 2 (5 points)***Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans le plan complexe ( $\mathcal{P}$ ) muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 4 cm, on considère le point  $A$  d'affixe  $a = -1$  et l'application  $f$ , du plan ( $\mathcal{P}$ ) dans lui-même, qui au point  $M$  d'affixe  $z$ , distinct de  $A$ , associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe :  $z' = \frac{iz}{z+1}$ .

1. Déterminer l'affixe des points  $M$  tels que  $M' = M$ .
2. Démontrer que pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et de  $O$ , on a :

$$OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a) Soit  $B$  le point d'affixe  $b = -\frac{1}{2} + i$ .

Placer dans le repère le point  $B$  et la médiatrice  $(\Delta)$  du segment  $[OA]$ .

- b) Calculer sous forme algébrique l'affixe  $b'$  du point  $B'$  image du point  $B$  par  $f$ .

Établir que  $B'$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$  et de rayon 1.

Placer le point  $B'$  et tracer le cercle  $(\mathcal{C})$  dans le repère.

- c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point  $M$  appartient à la médiatrice  $(\Delta)$ , son image  $M'$  par  $f$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .

- d) Soit  $C$  le point tel que le triangle  $AOC$  soit équilatéral direct.

En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point  $C$  par  $f$ . (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  distincts de  $A$  et de  $O$  dont l'image  $M'$  par  $f$  appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

- a) On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels tels que  $(x, y) \neq (-1, 0)$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Démontrer que la partie imaginaire de  $z'$  est égale à :

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $(\Gamma)$  et le tracer dans le repère.

- b) À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble  $(\Gamma)$ .

**Exercice 3 (6 points)**  
*Commun à tous les candidats*

On considère les deux courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  d'équations respectives  $y = e^x$  et  $y = -x^2 - 1$  dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente  $(\mathcal{T})$  commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.  
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe  $(\mathcal{C}_2)$ .

2. On désigne par  $a$  et  $b$  deux réels quelconques, par  $A$  le point d'abscisse  $a$  de la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  et par  $B$  le point d'abscisse  $b$  de la courbe  $(\mathcal{C}_2)$ .

a) Déterminer une équation de la tangente  $(\mathcal{T}_A)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  au point  $A$ .

b) Déterminer une équation de la tangente  $(\mathcal{T}_B)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_2)$  au point  $B$ .

c) En déduire que les droites  $(\mathcal{T}_A)$  et  $(\mathcal{T}_B)$  sont confondues si et seulement si les réels  $a$  et  $b$  sont solutions du système  $(S)$  :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

d) Montrer que le système  $(S)$  est équivalent au système  $(S')$  :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation  $(E) : e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4 = 0$ .

Pour cela, on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4.$$

a) Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 0[$ ,  $e^{2x} - 4 < 0$  et  $4e^x(x-1) < 0$ .

b) En déduire que l'équation  $(E)$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $] -\infty ; 0[$ .

c) Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

d) Démontrer que l'équation  $(E)$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On note  $a$  cette solution. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $a$ .

4. On prend pour  $A$  le point d'abscisse  $a$ . Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  du réel  $b$  pour lequel les droites  $(\mathcal{T}_A)$  et  $(\mathcal{T}_B)$  sont confondues.



**Exercice 4 (5 points)**  
*Commun à tous les candidats*

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$ .

Le but de cet exercice est d'étudier des suites  $(u_n)$  définies par un premier terme positif ou nul  $u_0$  et vérifiant pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction  $f$

- a) Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
- b) Résoudre dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$ .  
On note  $\alpha$  la solution.
- c) Montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[0, \alpha]$ , alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[0, \alpha]$ .  
De même, montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[\alpha, +\infty[$ , alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[\alpha, +\infty[$ .

2. Étude de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

- a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations  $y = x$  et  $y = f(x)$ .

Placer le point  $A_0$  de coordonnées  $(u_0; 0)$ , et, en utilisant ces courbes, construire à partir de  $A_0$  les points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

- b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

- c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

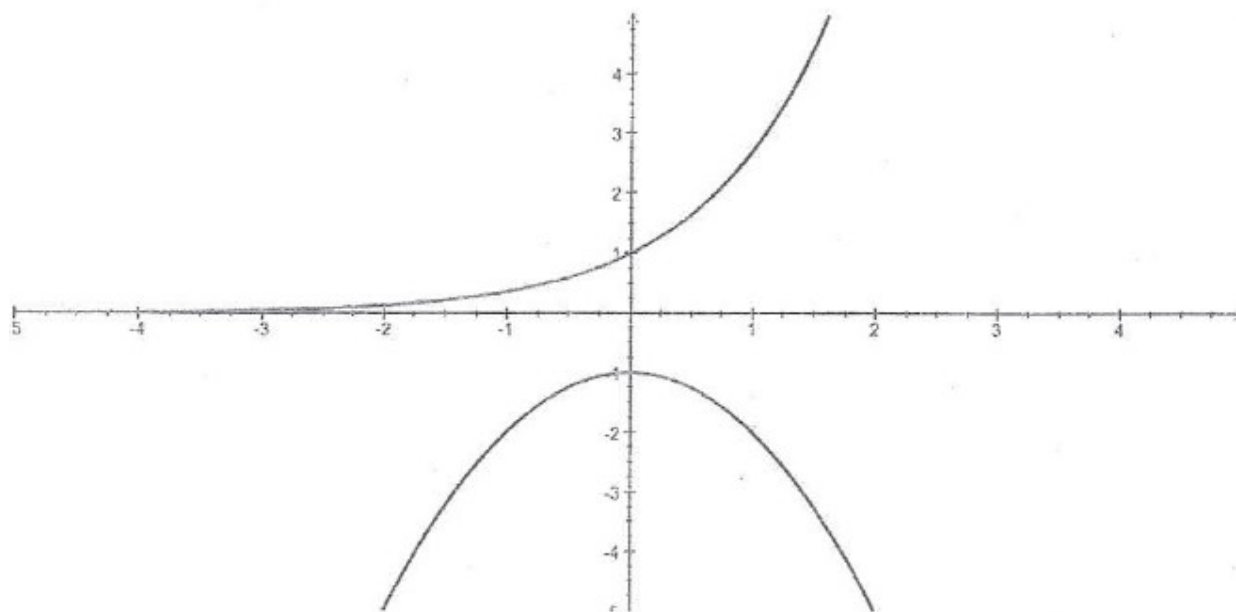
3. Étude des suites  $(u_n)$  selon les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$

*Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

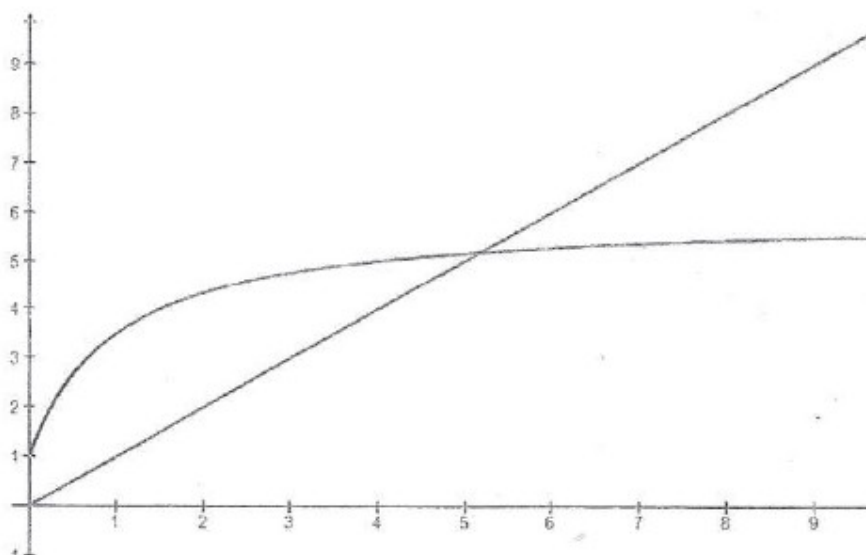
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite  $(u_n)$  suivant les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$  ?

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 3, question 1)



Annexe 2 (Exercice 4, question 2.a))



### Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm, on considère les points  $A, B, C, M, N$  et  $P$  d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \quad b = -1 + 2i, \quad c = 2 + 3i, \quad m = 7 - 5i, \quad n = 5 - i, \quad p = 9 + i.$$

1. a) Placer les points  $A, B, C, M, N$  et  $P$  dans le repère.
- b) Calculer les longueurs des côtés des triangles  $ABC$  et  $NMP$ .
- c) En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle  $ABC$  en le triangle  $MNP$ .

2. Une similitude directe

Soit  $s$  la similitude directe qui transforme le point  $A$  en  $N$  et le point  $B$  en  $P$ .

- a) Montrer qu'une écriture complexe de la similitude  $s$  est :

$$z' = \left( -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i.$$

- b) Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude  $s$ .
- c) Vérifier que la similitude  $s$  transforme le point  $C$  en  $M$ .

3. Une similitude indirecte

Soit  $s'$  la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2i\bar{z} + 3 - 3i.$$

- a) Vérifier que :
- $$\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M \\ s'(C) = P \end{cases}$$

- b) Démontrer que  $s'$  admet un unique point invariant  $K$  d'affixe  $k = 1 - i$ .

- c) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $K$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  et  $J$  le point d'affixe 2.

On pose :  $f = s' \circ h$ .

Déterminer les images des points  $K$  et  $J$  par la transformation  $f$ .

En déduire la nature précise de la transformation  $f$ .

- d) Démontrer que la similitude  $s'$  est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.



## 6) Antilles-Guyane juin 2010

### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, *une ou deux des réponses* proposées sont correctes.

Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.

Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.

Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A :  $\frac{5}{8}$                       B :  $\frac{21}{32}$                       C :  $\frac{11}{32}$                       D :  $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A :  $\frac{105}{248}$                       B :  $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$                       C :  $\frac{21^2}{32^2}$                       D :  $\frac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A :  $\frac{1}{3}$                       B :  $\frac{1}{5}$                       C :  $\frac{1}{12}$                       D :  $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A :  $0,35 \text{ à } 10^{-2}$  près    B :  $0,85^9$                       C :  $0,85^9 \times 0,15$                       D :  $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

### EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

Pour  $M \neq O$ , on rappelle que le point  $M'$  est l'image du point  $M$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\theta$  si et seulement si :

$$\begin{cases} OM' = OM & (1) \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases}$$

- a. Soient  $z, z'$  et  $\omega$  les affixes respectives des points  $M, M'$  et  $\Omega$ .  
Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
  - b. En déduire l'expression de  $z'$  en fonction de  $z, \theta$  et  $\omega$
2. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $a = 2\sqrt{3} - 2i$  et  $b = 2\sqrt{3} + 2i$ .
  - a. Écrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle.
  - b. Faire une figure et placer les points  $A$  et  $B$ .
  - c. Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.
4. Soit  $C$  le point d'affixe  $c = -8i$  et  $D$  son image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .  
Placer les points  $C$  et  $D$ .  
Montrer que l'affixe du point  $D$  est  $d = 4\sqrt{3} + 4i$ .
5. Montrer que  $D$  est l'image du point  $B$  par une homothétie de centre  $O$  dont on déterminera le rapport.
6. Montrer que  $OAD$  est un triangle rectangle.

## EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

### 1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

**Propriété 1 :** Toute similitude indirecte qui transforme un point  $M$  d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$  admet une expression complexe de la forme  $z' = a\bar{z} + b$  où  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

**Propriété 2 :** Soit  $C$  un point d'affixe  $c$ . Pour tout point  $D$ , distinct de  $C$ , d'affixe  $d$  et pour tout point  $E$ , distinct de  $C$ , d'affixe  $e$ , on a :

$$\left( \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CE} \right) = \arg \left( \frac{e-c}{d-c} \right) \pmod{2\pi}.$$

**Question :** Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $c = 3$  et  $d = 1 - 3i$ , et  $\mathcal{S}_1$  la similitude qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M_1$  symétrique de  $M$  par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$  des réels.
  - a. Placer les points  $C$  et  $D$  puis leurs images respectives  $C_1$  et  $D_1$  par  $\mathcal{S}_1$ . On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.
  - b. Donner l'expression complexe de  $\mathcal{S}_1$ .
3. Soit  $\mathcal{S}_2$  la similitude directe définie par :
  - le point  $C_1$  et son image  $C'$  d'affixe  $c' = 1 + 4i$ ;
  - le point  $D_1$  et son image  $D'$  d'affixe  $d' = -2 + 2i$ .
  - a. Montrer que l'expression complexe de  $\mathcal{S}_2$  est :  $z' = iz + 1 + i$ .
  - b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit  $\mathcal{S}$  la similitude définie par  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ .  
Déterminer l'expression complexe de  $\mathcal{S}$ .
5. On pourra admettre désormais que  $\mathcal{S}$  est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = i\bar{z} + 1 + i.$$

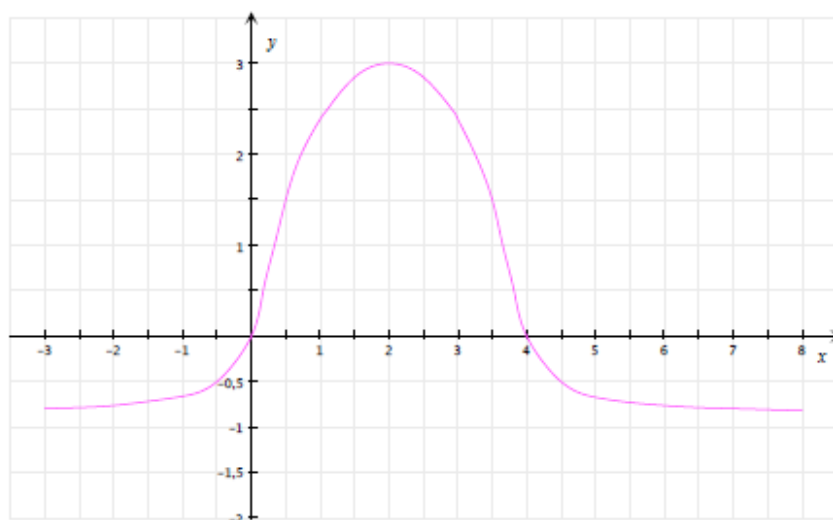
- Quelle est l'image de  $C$  par  $\mathcal{S}$  ? Quelle est l'image de  $D$  par  $\mathcal{S}$  ?
- Soit  $H$  le point d'affixe  $h$  tel que :  $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$ .  
Montrer que le triangle  $CDH$  est équilatéral direct.
- Soit  $H'$  l'image de  $H$  par  $\mathcal{S}$ . Préciser la nature du triangle  $C'D'H'$  et construire le point  $H'$  (on ne demande pas de calculer l'affixe  $h'$  du point  $H'$ ).

### EXERCICE 3

4 points

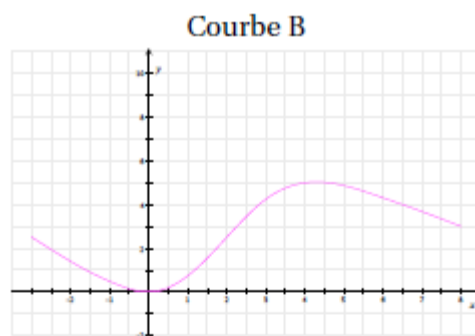
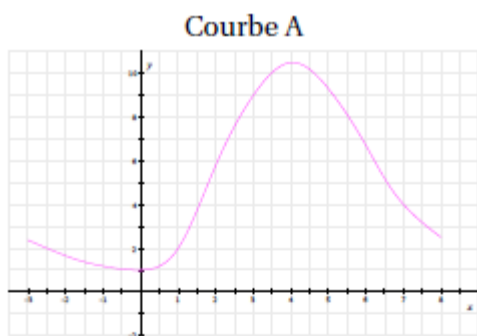
Commun à tous les candidats

On donne la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et continue sur l'intervalle  $I = [-3 ; 8]$ .



On définit la fonction  $F$  sur  $I$ , par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- Que vaut  $F(0)$  ?
  - Donner le signe de  $F(x)$  :
    - pour  $x \in [0 ; 4]$  ;
    - pour  $x \in [-3 ; 0]$ .
Justifier les réponses.
  - Faire figurer sur le graphique donné en ANNEXE les éléments permettant de justifier les inégalités  $6 \leq F(4) \leq 12$ .
- Que représente  $f$  pour  $F$  ?
  - Déterminer le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $I$ . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de  $f$ .
- On dispose de deux représentations graphiques sur  $I$ .



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction  $F$ ? Justifier la réponse.

#### EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

##### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = x - x \ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en 0 et  $+\infty$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $g'(x) = -\ln x$ .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .

##### Partie B

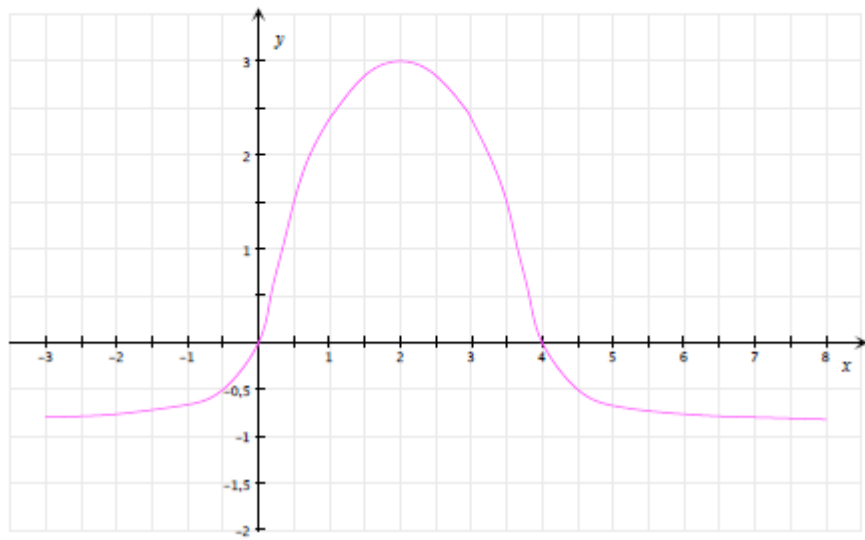
Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ .

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
  - a. le sens de variation de la suite  $(u_n)$ ;
  - b. la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $v_n = \ln(u_n)$ .
  - a. Montrer que  $v_n = n - n \ln n$ .
  - b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
  - c. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée.
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Commun à tous les candidats



### III. Exercices antérieurs ciblés

#### A) Questions de recherche

##### **Sujets zéro 2004 exercice 17**

On cherche les nombres réels  $a$  strictement positifs et les fonctions  $f$  définies et continues sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ , vérifiant, pour tout  $x$  supérieur ou égal à  $a$ , la relation  $\int_a^x f(t) \, dt = 2 \ln x$ .  
Démontrer que le problème posé a une et une seule solution, que l'on déterminera.

##### **Sujets zéro 2004 exercice 18**

Soit  $a$  un réel strictement positif.

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, rappeler la nature de l'ensemble des points dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient l'équation  $x^2 + y^2 = a^2$ .
2. On pose  $I(a) = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ . En interprétant  $I(a)$  comme une aire déterminer  $a$  pour que l'on ait  $I(a) = \pi$ .

##### **Sujets zéro 2004 exercice 22**

Soit  $(u_n)$  une suite telle que les suites de terme général  $v_n = 1 + u_n$  et  $w_n = 3 - u_n$  soient adjacentes. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ , et préciser, le cas échéant, sa limite.

##### **Sujets zéro 2004 exercice 25**

Soit  $j = e^{2i\pi/3}$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $2\pi/3$ . On désigne par  $A$  l'ensemble des nombres complexes de la forme  $a + bj$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs.

1. Montrer que, pour tout élément  $z$  de  $A$ ,  $|z|^2$  est un entier.
2. Quels sont les éléments  $z$  non nuls de  $A$  qui sont tels que  $\frac{1}{z}$  soit également élément de  $A$ ?

##### **Sujets zéro 2004 exercice 30**

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de rayon 4 cm.

Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle  $\mathcal{C}$ ?

##### **Sujets zéro 2004 exercice 33**

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Montrer que  $n^k$  peut s'écrire comme somme de  $n$  entiers impairs consécutifs.



### Sujets zéro 2004 exercice 34

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers strictement positifs, on désigne par  $m(a, b)$  le plus petit des deux nombres  $\sqrt[a]{b}$  et  $\sqrt[b]{a}$  et on considère l'ensemble  $A = \{m(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$ .

Montrer que  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  admettant un plus grand élément que l'on déterminera.

### Sujets zéro 2004 exercice 35

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $r = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  d'équations respectives, dans le repère  $r$ ,  $y = \frac{5}{4}(x + 1)$  et  $y = \frac{5}{4e}(x + 5)$ .

Déterminer des nombres réels  $x_1$  et  $x_2$ , avec  $x_1 \neq x_2$ , et une fonction exponentielle  $f$ , c'est-à-dire une fonction de la forme  $x \mapsto Ce^{kx}$ , où  $C$  et  $k$  sont des constantes réelles, telle que la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  soit tangente à  $\Delta_1$  au point d'abscisse  $x_1$  et à  $\Delta_2$  au point d'abscisse  $x_2$ .

### Sujets zéro 2004 exercice 36

Établir que pour tout couple  $(x, y)$  de nombres réels on a l'inégalité

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

### France juin 2004 exercice 1 (3pts – 36min)



On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 3 \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > n^2$ .

b) Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?

3) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

**Antilles juin 2005 exercice 2 (6pts)**



1- Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0 ; 1]$

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

2- a- Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$

2- b- Dédurre, en utilisant 1, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1) \quad \text{puis que } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad (2)$$

3- On appelle  $U$  la suite définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Démontrer que  $U$  est décroissante (on pourra utiliser 2° b).

4- On désigne par  $V$  la suite de terme général

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Démontrer que  $V$  est croissante.

5- Démontrer que  $U$  et  $V$  convergent vers une limite commune notée  $\gamma$ .

Déterminer une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près par la méthode de votre choix.



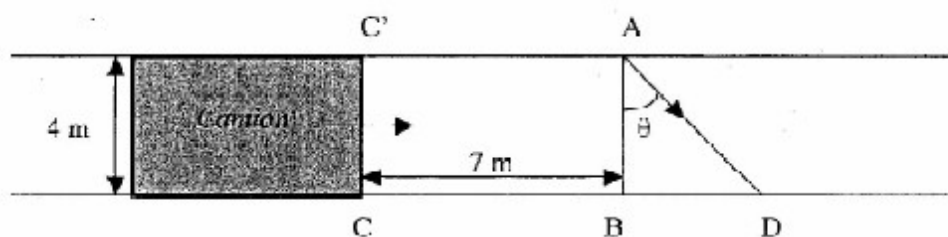
**Nouvelle Calédonie novembre 2005 exercice 4 (5pts)**



Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ... 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment  $[CC']$  sur le schéma ci-dessous.  
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle  $\theta = \widehat{BAD}$  avec  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  (en radians)



1°) Déterminer les distances AD et CD en fonction de  $\theta$  et les temps  $t_1$  et  $t_2$  mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2°) On pose  $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$ .

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si  $f(\theta) > 0$ .

3°) Conclure.

Rappel : La fonction  $x \mapsto \tan x$  est dérivable sur  $[0 ; \frac{\pi}{2} [$  et a pour dérivée la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**Partie A**

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 1 cm).

- 1) Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- 2) Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3) Établir que l'équation  $f(x) = 10$  admet une unique solution strictement positive  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Donner une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près de  $\alpha$ .
- 4) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
- 5) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^3 f(x) dx$ .

**Partie B**

On note  $y(t)$  la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant  $t$ ,  $t$  étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant  $t = 0$ , est  $y(0) = 10$ .

On admet que la fonction qui, à tout réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  associe  $y(t)$ , est solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$ .

- 1) Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- 2) On se propose de démontrer que cette fonction  $f$  est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
  - a) On note  $g$  une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur  $[0; +\infty[$ , vérifiant  $g(0) = 10$ . Démontrer que la fonction  $g - f$  est solution, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle : (E')  $y' + \frac{1}{2}y = 0$ .
  - b) Résoudre l'équation différentielle (E').
  - c) Conclure.
- 3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
- 4) La valeur  $\theta$  en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ . Calculer la valeur exacte de  $\theta$ , puis donner la valeur approchée décimale de  $\theta$  arrondie au degré.

Polynésie juin 2007 exercice 2 (4pts)



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation :  $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$ ,  $\bar{z}$  étant le conjugué de  $z$ .

2. On considère le point A d'affixe  $4 - 2i$ .

Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe  $2i$ .

- a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe  $z$  différente de  $2i$  tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe  $z$  tels que  $z = 2i + 2e^{i\theta}$ ,  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

4. À tout point M d'affixe  $z \neq -2$ , on associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$ .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  différente de  $-2$  tels que  $|z'| = 1$ .

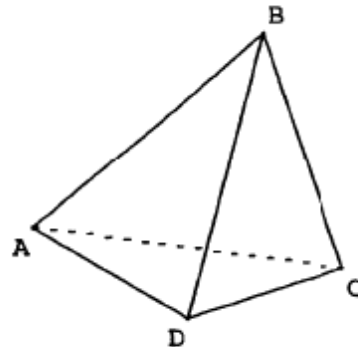


On considère un tétraèdre  $ABCD$ .

On note  $I, J, K, L, M, N$  les milieux respectifs des arêtes

$[AB], [CD], [BC], [AD], [AC]$  et  $[BD]$ .

On désigne par  $G$  l'isobarycentre des points  $A, B, C$  et  $D$ .



1. Montrer que les droites  $(IJ), (KL)$  et  $(MN)$  sont concourantes en  $G$ .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $AB = CD, BC = AD$  et  $AC = BD$ .  
(On dit que le tétraèdre  $ABCD$  est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère  $IKJL$  ? Préciser également la nature des quadrilatères  $IMJN$  et  $KNLM$ .

b. En déduire que  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites  $(IJ)$  et  $(MN)$  sont orthogonales et les droites  $(KL)$  et  $(MN)$  sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(MKN)$ .

b. Quelle est la valeur du produit scalaire  $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$  ? En déduire que  $(IJ)$  est orthogonale à la droite  $(AB)$ . Montrer de même que  $(IJ)$  est orthogonale à la droite  $(CD)$ .

c. Montrer que  $G$  appartient aux plans médiateurs de  $[AB]$  et  $[CD]$ .

d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que  $G$  est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$  ?



L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On nomme (S) la surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan  $(xOy)$ .
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives  $(3; 1; -3)$  et  $(-1; 1; 1)$ .
  - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
  - b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan  $(xOy)$ .
4. a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation  $z = 68$ . Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b) M étant un point de (C), on désigne par  $a$  son abscisse et par  $b$  son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que  $a$  et  $b$  soient des entiers naturels vérifiant  $a < b$  et  $\text{ppcm}(a; b) = 440$ , c'est-à-dire tel que  $(a, b)$  soit

$$\text{solution du système (I) : } \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}$$

Montrer que si  $(a, b)$  est solution de (I) alors  $\text{pgcd}(a; b)$  est égal à 1 ou 5.

Conclure.

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*



Polynésie juin 2008 exercice 3 (5pts)



Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit  $f$  la fonction solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle  $y' = -y + 2$  telle que  $f(\ln 2) = 1$ .

**Proposition 1 :** « La courbe représentative de  $f$  admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation  $y = 2x$  ».

2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[A, +\infty[$  où  $A$  est un réel strictement positif.

**Proposition 2 :** « Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$  ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.  
Sa masse initiale est de 10 kg.

**Proposition 3 :** « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un même univers  $\Omega$  muni d'une probabilité  $p$ .

**Proposition 4 :** « Si  $A$  et  $B$  sont indépendants et si  $p(A) = p(B) = 0,4$  alors  $p(A \cup B) = 0,8$  ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

**Proposition 5 :** « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 »



**Partie A**

**Restitution organisée de connaissances.**

On supposera connus les résultats suivants :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

- Si  $u \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b u(x) dx \geq 0$ .
- Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)] dx = \alpha \int_a^b u(x) dx + \beta \int_a^b v(x) dx$ .

Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$  et

si, pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ .

Sa courbe représentative  $C$  ainsi que la droite  $D$  d'équation  $y = x$  sont données en annexe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que  $f$  est croissante et positive sur  $[0, +\infty[$ .
2. a) Montrer que la courbe  $C$  admet pour asymptote la droite  $D$ .  
b) Étudier la position de  $C$  par rapport à  $D$ .
3. Soit  $I$  l'intégrale définie par :  $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x}) dx = \int_0^1 [f(x) - x] dx$ . On ne cherchera pas à calculer  $I$ .  
a) Donner une interprétation géométrique de  $I$ .  
b) Montrer que pour tout réel  $t \geq 0$ , on a  $\ln(1 + t) \leq t$ .  
(On pourra étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(t) = \ln(1 + t) - t$ )  
On admettra que pour tout réel  $t \geq 0$ , on a  $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t)$ .  
c) En déduire que pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$ , on a :  $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ .  
d) Montrer que  $\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}$ .  
e) En déduire un encadrement de  $I$  d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par  $M$  et  $N$  les points de même abscisse  $x$  appartenant respectivement à  $C$  et  $D$ .

On juge que  $M$  et  $N$  sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance  $MN$  est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $M$  et  $N$  sont indiscernables.

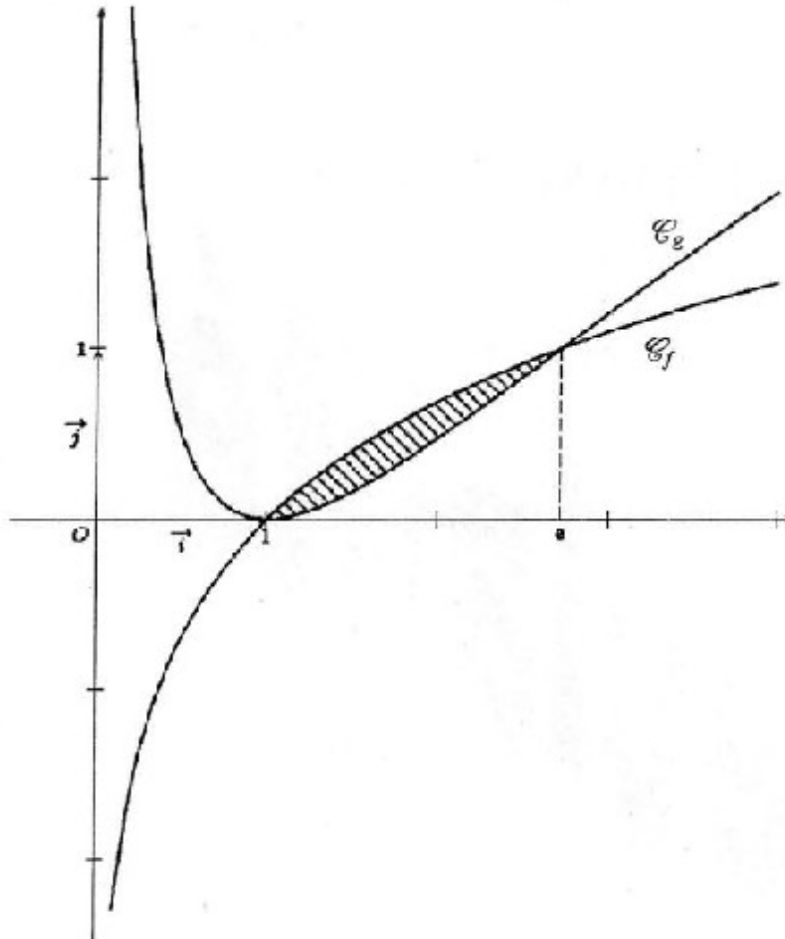
Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



France juin 2008 exercice 1 (5pts)



Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .



1) On cherche à déterminer l'aire  $A$  (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note  $I = \int_1^e \ln x \, dx$  et  $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ .

a) Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire  $I$ .

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que  $J = e - 2I$ .

c) En déduire  $J$ .

d) Donner la valeur de  $A$ .

2) Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1; e]$ , on note  $M$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_g$  de même abscisse.

Pour quelle valeur de  $x$  la distance  $MN$  est maximale ? Calculer la valeur maximale de  $MN$ .

France juin 2008 exercice 2 (5pts)



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  
 $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 2, 1)$  et  $C(3, -1, 2)$ .

1) a) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan  $(ABC)$  a pour équation cartésienne  $2x + y - z - 3 = 0$ .

2) On considère les plans  $(P)$  et  $(Q)$  d'équations respectives  $x + 2y - z - 4 = 0$  et  $2x + 3y - 2z - 5 = 0$ .

Démontrer que l'intersection des plans  $(P)$  et  $(Q)$  est une droite  $(\mathcal{D})$ , dont une représentation paramétrique

$$\text{est : } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3) Quelle est l'intersection des trois plans  $(ABC)$ ,  $(P)$  et  $(Q)$  ?

4) Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la distance du point  $A$  à la droite  $(\mathcal{D})$ .

**Centres étrangers juin 2008 exercice 2 (5pts)**



Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ; l'unité graphique est 1 cm.

- 1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :  $z^2 + 4z + 8 = 0$ . On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
- 2) On note  $A$  et  $B$  les points du plan d'affixes respectives :  $a = 2 - 2i$  et  $b = -a$ . Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
  - a) Déterminer l'affixe  $c$  du point  $C$ , image du point  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
  - b) On note  $D$  l'image de  $C$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  ; démontrer que l'affixe  $d$  du point  $D$  est  $d = 2 - 6i$ .
  - c) Placer les points  $C$  et  $D$  sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?
- 3)  $\alpha$  étant un nombre réel non nul, on désigne par  $G_\alpha$  le barycentre du système :
 
$$\{(A; 1); (B; -1); (C; \alpha)\}.$$
  - a) Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{CG_\alpha}$  en fonction du vecteur  $\overrightarrow{BA}$ .
  - b) En déduire l'ensemble des points  $G_\alpha$  lorsque  $\alpha$  décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.
  - c) Pour quelle valeur de  $\alpha$  a-t-on  $G_\alpha = D$  ?
- 4) On suppose dans cette question que  $\alpha = 2$ .  
*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
 Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$ .



**I) Restitution organisée des connaissances**

**Prérequis :** on rappelle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

1) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

**II) Étude d'une fonction  $f$**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1) Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$ .

a) Étudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b) Calculer  $u(1)$  et en déduire le signe de  $u(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

2) Étude de la fonction  $f$ .

a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et construire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3) Éléments graphiques et tracés.

a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$ .

b) Déterminer la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $(\Delta)$ .

c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $(\Delta)$ .

**III) Calculs d'aires.**

On note  $\alpha$  un nombre réel strictement positif et on désigne par  $A(\alpha)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .

1) On suppose dans cette question que  $\alpha > 1$ .

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ .

b) Déterminer la limite  $l$  de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que  $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$ .

**I) Restitution organisée des connaissances**

Prérequis : on rappelle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

1) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

**II) Étude d'une fonction  $f$** 

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1) Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$ .

a) Étudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b) Calculer  $u(1)$  et en déduire le signe de  $u(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

2) Étude de la fonction  $f$ .

a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et construire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3) Éléments graphiques et tracés.

a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$ .

b) Déterminer la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $(\Delta)$ .

c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $(\Delta)$ .

**III) Calculs d'aires.**

On note  $\alpha$  un nombre réel strictement positif et on désigne par  $A(\alpha)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .

1) On suppose dans cette question que  $\alpha > 1$ .

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ .

b) Déterminer la limite  $l$  de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que  $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$ .



Réunion juin 2008 exercice 4 (5pts)



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

On considère le point  $A$  de  $(\mathcal{C})$  d'affixe  $z_A = e^{\frac{i\pi}{3}}$ .

1) Déterminer l'affixe  $z_B$  du point  $B$  image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Déterminer l'affixe  $z_C$  du point  $C$  image de  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

2) a) Justifier que  $(\mathcal{C})$  est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Construire les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur la feuille de papier millimétré.

b) Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ? Justifier.

3) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-2$ .

a) Compléter la figure en plaçant les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  images respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  par  $h$ .

b) Quelle est la nature du triangle  $PQR$  ? Justifier.

4) Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a) Donner l'écriture complexe de  $h$ .

b) Calculer  $z_A + z_B + z_C$ . En déduire que  $A$  est le milieu du segment  $[QR]$ .

c) Que peut-on dire de la droite  $(QR)$  par rapport au cercle  $(\mathcal{C})$  ?



### A – Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

Démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ .

### B – Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  est sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Étudier les variations de la fonction  $f$  et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ . On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

### C – Étude d'une famille de fonctions.

Pour tout entier relatif  $k$ , on note  $f_k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ .

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas  $k = -1$  a été traité dans la partie B, car on a  $f_{-1} = f$  et  $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$ .

1. a) Quelle est la nature de la fonction  $f_0$  ?  
b) Déterminer les points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$ .  
Vérifier que, pour tout entier  $k$ , ces points appartiennent à la courbe  $\mathcal{C}_k$ .
2. Étudier, suivant les valeurs du réel  $x$ , le signe de l'expression :  $(x+1)(e^x - 1)$ .  
En déduire, pour  $k$  entier relatif donné, les positions relatives des courbes  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ .
3. Calculer  $f_k'(x)$  pour tout réel  $x$  et pour tout entier  $k$  non nul.  
En déduire le sens de variation de la fonction  $f_k$  suivant les valeurs de  $k$ . (On distinguera les cas :  $k > 0$  et  $k < 0$ .)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre  $k$ , parmi les entiers  $-1$ ,  $-3$ ,  $1$  et  $2$ .  
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



## B) Exercices avec application sur calculatrice

### Sujets zéro novembre 2003 exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^x + 1,1x + 1,6$$

.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre  $-5 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4$ .  
Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
  - (a) Sur les variations de la fonction  $f$  ?
  - (b) Sur le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  ?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction  $f$ .
  - (a) Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'inéquation  $e^{2x} - 2,1e^x + 1,1 \geq 0$ .
  - (b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
  - (c) Dédire de cette étude le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-0,05 ; 0,15]$ , de façon à visualiser les résultats de la question 3.  
Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée  $y$  peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

**Partie A**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par : pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

- Montrer que la fonction  $f : t \mapsto (2-t)e^t$  est une primitive de  $g : t \mapsto (1-t)e^t$  sur  $[0;1]$ .  
En déduire la valeur de  $u_1$ .
- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout  $n$  non nul,  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$  (R)

**Partie B**

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de $n$	Valeur de $u_n$ affichée par la première calculatrice	Valeur de $u_n$ affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

### Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  à partir de la relation de définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul} : u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .
2. a) Montrer que, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0;1]$  et pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

$$\text{b) En déduire que pour tout } n \text{ non nul, } u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel  $a$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n, v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

On s'intéresse à l'influence du terme initial  $a$  de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$   
 $v_n = u_n + (n!) (a + 2 - e)$  où  $n!$  désigne le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite  $(v_n)$  à l'infini suivant les valeurs de  $a$ .

$$(\text{On rappelle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty)$$

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

## IV. Exercices antérieurs complémentaires

### A) Probabilités

France juin 2007 - exercice 4



#### EXERCICE 4 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

*Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.*

*Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à  $10^{-3}$  près.*

1) Un représentant de commerce propose un produit à la vente.

Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2.

Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

- a) 0,4                                      b) 0,04                                      c) 0,1024                                      d) 0,2048

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

- a) 0,043                                      b) 0,275                                      c) 0,217                                      d) 0,033

3) Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

- a) 0,100                                      b) 0,091                                      c) 0,111                                      d) 0,25

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

- a)  $\frac{5}{9}$                                       b)  $\frac{9}{14}$                                       c)  $\frac{4}{7}$                                       d)  $\frac{1}{3}$



**EXERCICE 4**

**Commun à tous les candidats**

*Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.

Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.

Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

- a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

0,8            0,5            0,2            0,4            0,6

- b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

0,1            0,2            0,3            0,4            0,5

- c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

0,2            0,4            0,5            0,6            0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

- a. Une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588            0,2487            0,1683            0,0095

- b. Une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000            0,2513            0,5025

- c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$              $\frac{103}{199}$              $\frac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre  $\lambda$  est donné dans le tableau suivant :

$\lambda$	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si  $X$ , durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

Une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,3679            0,6321



### EXERCICE 1 (3 points)

*Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.*

*Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.*

*Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :

4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

**Lors d'un premier jeu**, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.

Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 : Le jeu est

A : favorable au joueur      B : défavorable au joueur      C : équitable

Question 2 : Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.

La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A :  $\frac{216}{625}$       B :  $\frac{544}{625}$       C :  $\frac{2}{5}$

**Lors d'un second jeu**, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à

A :  $\frac{4}{15}$       B :  $\frac{11}{30}$       C :  $\frac{11}{15}$





**EXERCICE 3 (3 points)**  
**Commun à tous les candidats.**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions, chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.*

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1- La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

- a. 0,4      b. 0,75      c.  $\frac{1}{150}$

2- Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

- a. 0,3      b. 0,8      c. 0,4

3- La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

- a. 1,15      b. 0,4      c. 0,3

4- La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

- a. 0,9      b. 0,7      c. 0,475

5- La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français :

- a.  $\frac{4}{150}$       b.  $\frac{12}{19}$       c. 0,3

6- Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque, la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

- a.  $1 - (0,25)^{20}$       b.  $20 \times 0,75$       c.  $0,75 \times (0,25)^{20}$





EXERCICE 4

5 points

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

Les trois questions sont indépendantes.

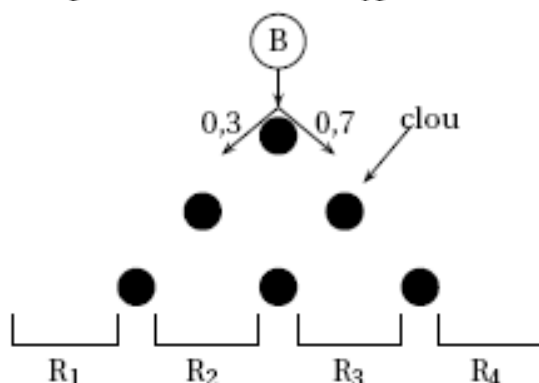
1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que

- si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
- le test est positif pour 3 % des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

☐ 0,95   ☐ 0,9   ☐ 0,15   ☐ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ . À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).

On note  $p_1$  la probabilité que la bille tombe dans le bac  $R_1$  ou dans le bac  $R_3$  et  $p_2$  la probabilité que la bille tombe dans le bac  $R_2$  ou dans le bac  $R_4$ .

Que valent  $p_1$  et  $p_2$  ?

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $p_1 = p_2 = 0,5$              | <input type="checkbox"/> $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$   |
| <input type="checkbox"/> $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$ | <input type="checkbox"/> $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$ . |

**EXERCICE 3 (5 points)****Commun à tous les candidats***Cet exercice comporte deux parties indépendantes.**La partie I est la démonstration d'un résultat de cours. La partie II est un Q.C.M.***PARTIE II***Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.**Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.**Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève  $\frac{1}{2}$  point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie II est ramenée à zéro.*

1°) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On extrait simultanément trois boules de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

**A**  $\frac{75}{512}$

**B**  $\frac{13}{56}$

**C**  $\frac{15}{64}$

**D**  $\frac{15}{28}$

2°) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population.

Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe?

**A**  $\frac{1}{120}$

**B**  $\frac{3}{40}$

**C**  $\frac{1}{12}$

**D**  $\frac{4}{30}$

3°) Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

**A** 2

**B** 13

**C** 16

**D** 17

4°) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{6}$ .On a donc pour tout réel  $t > 0$  :  $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$  (avec  $\lambda = \frac{1}{6}$ )

où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à  $10^{-4}$  près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes?

**A** 0,2819

**B** 0,3935

**C** 0,5654

**D** 0,6065



**EXERCICE 2 (4 points)**  
Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

- a)  $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$       b)  $\frac{9}{8}$       c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$       d)  $\frac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

- a) 0      b)  $\left(\frac{1}{8}\right)^3$       c)  $\frac{23}{128}$       d)  $\frac{1}{92}$

B. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = x + m$  où  $m$  est une constante réelle.

Question 3 :  $f$  est une densité de probabilité sur l'intervalle  $[0; 1]$  lorsque

- a)  $m = -1$       b)  $m = \frac{1}{2}$       c)  $m = e^{\frac{1}{2}}$       d)  $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

- a)  $1 - \frac{1}{e}$       b)  $\frac{1}{e}$       c)  $\frac{1}{5e}$       d)  $\frac{1}{0,2}(e - 1)$



## EXERCICE 3

## Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

$B_1$ , contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5880 sont exactes,

$B_2$ , contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de  $B_1$ . La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$A: \frac{\binom{120}{3} + \binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \quad B: \frac{3}{120}$$

$$C: \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \times \left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \quad D: \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de  $B_1$  est :

$$A: 0,98 \quad B: \frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,6 \times 0,02} \quad C: 0,6 \times 0,98 \quad D: \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$$

## Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité  $p$  de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  (loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0005$ ). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant  $t$  est :

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$A: e^{-\frac{2500}{2000}} \quad B: e^{\frac{5}{4}} \quad C: 1 - e^{-\frac{2500}{2000}} \quad D: e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$$E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

- a. L'intégrale  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$  est égale à :

$$A: \lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t} \quad B: -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad C: \lambda te^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \quad D: te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

- b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$A: 3500 \quad B: 2000 \quad C: 2531,24 \quad D: 3000$$





**Exercice 1 (4 points)**  
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions A, B ou C est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

**Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.**

1) On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A.  $\frac{1}{56}$

B.  $\frac{1}{120}$

C.  $\frac{1}{3!}$

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A.  $\frac{11}{56}$

B.  $\frac{11}{120}$

C.  $\frac{16}{24}$

2) On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A.  $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$

B.  $\left(\frac{3}{8}\right)^5$

C.  $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A.  $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

B.  $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$

C.  $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3) On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

$R_1$  l'événement : « La première boule tirée est rouge » ;

$N_1$  l'événement : « La première boule tirée est noire » ;

$R_2$  l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;

$N_2$  l'événement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a) La probabilité conditionnelle  $P_{R_1}(R_2)$  est :

A.  $\frac{5}{8}$

B.  $\frac{4}{7}$

C.  $\frac{5}{14}$

b) La probabilité de l'événement  $R_1 \cap N_2$  est :

A.  $\frac{16}{49}$

B.  $\frac{15}{64}$

C.  $\frac{15}{56}$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A.  $\frac{5}{8}$

B.  $\frac{5}{7}$

C.  $\frac{3}{28}$

d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A.  $\frac{15}{56}$

B.  $\frac{3}{8}$

C.  $\frac{5}{7}$



**EXERCICE 1 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.*

*Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 6, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.*

*Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.*

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité  $p$  de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Ainsi, la probabilité d'un intervalle  $[0, t]$ , notée  $p([0, t])$ , est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant  $t$ .

Cette loi est telle que  $p([0, t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ , où  $t$  est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , avec  $\lambda > 0$ ).

1) Pour  $t \geq 0$ , la valeur exacte de  $p([t, +\infty[)$  est :

(a)  $1 - e^{-\lambda t}$

(b)  $e^{-\lambda t}$

(c)  $1 + e^{-\lambda t}$

2) La valeur de  $t$  pour laquelle on a  $p([0, t]) = p([t, +\infty[)$  est :

(a)  $\frac{\ln 2}{\lambda}$

(b)  $\frac{\lambda}{\ln 2}$

(c)  $\frac{\lambda}{2}$

3) D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de  $\lambda$  est alors :

(a)  $\ln\left(\frac{50}{41}\right)$

(b)  $\ln\left(\frac{41}{50}\right)$

(c)  $\frac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4) Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

(a)  $p([1, +\infty[)$

(b)  $p([3, +\infty[)$

(c)  $p([2, 3])$

*Dans la suite de l'exercice on prendra  $\lambda = 0,2$ .*

5) La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à  $10^{-4}$  près, est :

(a) 0,5523

(b) 0,5488

(c) 0,4512

6) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement «  $X = 4$  » est :

(a) 0.5555

(b) 0.8022

(c) 0.1607

**Exercice 1 (6 points)****Commun à tous les candidats**

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.

Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

<p>1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue <math>n</math> tirages indépendants et sans remise, <math>n</math> désignant un entier supérieur à 10. Soit <math>X</math> la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.</p>	<p><i>a.</i> <math>X</math> suit une loi binomiale de paramètres <math>n</math> et <math>\frac{1}{4}</math>.</p> <p><i>b.</i> <math>P(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}</math></p> <p><i>c.</i> <math>P(X &lt; 5) = 1 - P(X &gt; 5)</math></p> <p><i>d.</i> <math>E(X) = 0,75 n</math></p>
<p>2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.</p> <p>Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs.</li> <li>Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).</li> </ul> <p>Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.</p> <p>On note <math>M</math> l'événement : « l'individu est malade » et <math>T</math> l'événement : « le test pratiqué est positif ».</p>	<p><i>a.</i> <math>P_M(T) + P_{\bar{M}}(T) = 1,01</math></p> <p><i>b.</i> <math>P_M(T) + P_{\bar{M}}(T) = P(T)</math></p> <p><i>c.</i> <math>P(T) = 2,97 \cdot 10^{-2}</math></p> <p><i>d.</i> Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.</p>
<p>3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire <math>Y</math> qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :</p>	<p><i>a.</i> La densité de probabilité de <math>Y</math> est la fonction <math>f</math> définie sur <math>[0 ; +\infty[</math> par : <math>f(t) = e^{-0,01t}</math>.</p> <p><i>b.</i> Pour tout réel <math>t</math> positif, <math>P(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}</math></p> <p><i>c.</i> La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.</p> <p><i>d.</i> Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.</p>





**Exercice 1 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

Cet exercice comporte 2 parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

**Partie I**

1. Dans un questionnaire à choix multiple (QCM), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.  
Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

La réponse exacte rapporte  $n$  point(s) et une réponse fausse fait perdre  $p$  point(s).

Soit  $N$  la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

1.1. Donner la loi de probabilité de  $N$ .

1.2. Quelle relation doit exister entre  $n$  et  $p$  pour que l'espérance mathématique de  $N$  soit nulle ?

2. A un concours un candidat doit répondre à un QCM de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

**Partie II**

Répondre au QCM proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

**Document à rendre avec la copie**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

- a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
180	330	110

- b. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(A) = 0,4 \quad p(B) = 0,5 \quad p(\overline{A \cap B}) = 0,35$$

Combien vaut  $p(A \cap B)$  ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(A \cap B) = 0,1$	$p(A \cap B) = 0,25$	Les données sont insuffisantes pour répondre

- c. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(B \cap A) = \frac{1}{6} \quad p_A(B) = \frac{1}{4} \quad (\text{probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé}).$$

Combien vaut  $p(A)$  ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$

- d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

$x_i$	1	2	4
$p_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

**EXERCICE 3 (5 points)**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Soient A et B deux événements d'un même univers  $\Omega$  muni d'une probabilité  $p$ .

**Proposition 4 :** « Si A et B sont indépendants et si  $p(A) = p(B) = 0,4$  alors  $p(A \cup B) = 0,8$  ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

**Proposition 5 :** « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».

**EXERCICE 1 (3 points)**

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre **propositions** est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la **question** et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro **sinon**.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité  $p$ .

On sait que  $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$  et  $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$ .

La probabilité de l'événement B est égale à :

- a.  $\frac{2}{5}$                       b.  $\frac{2}{3}$                       c.  $\frac{3}{5}$                       d.  $\frac{1}{2}$

2. On note  $X$  une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,04$ .

On rappelle que pour tout réel  $t$  positif, la probabilité de l'événement  $(X \leq t)$ , notée  $p(X \leq t)$ , est

donnée par :  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La valeur approchée de  $p(X > 5)$  à  $10^{-2}$  près par excès est égale à :

- a. 0,91                      b. 0,18                      c. 0,19                      d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{1}{10}$  ; s'il ne pleut pas, je sors mon chien

avec une probabilité égale à  $\frac{9}{10}$ .

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

- a.  $\frac{9}{10}$                       b.  $\frac{27}{40}$                       c.  $\frac{3}{4}$                       d.  $\frac{27}{28}$



Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.

Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention **VRAIE** ou **FAUSSE**.

Pour chaque question, il est compté 1 point si les deux réponses sont exactes, 0,5 point pour une réponse exacte et une absence de réponse et 0 point sinon.

<p><b>Question A</b></p> <p>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les événements :</p> <p>A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».</p>	<p><b>Proposition 1</b></p> <p>La probabilité de A est égale à <math>\frac{3}{7}</math>.</p>	<p><b>Proposition 2</b></p> <p>La probabilité de B est égale à <math>\frac{1}{7}</math>.</p>
<p><b>Question B</b></p> <p>Soient A, B et C trois événements d'un même univers <math>\Omega</math> muni d'une probabilité <math>P</math>. On sait que :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A et B sont indépendants</li> <li><math>P(A) = \frac{2}{5}</math> ; <math>P(A \cup B) = \frac{3}{4}</math> ;</li> <li><math>P(C) = \frac{1}{2}</math> ; <math>P(A \cap C) = \frac{1}{10}</math>.</li> </ul>	<p><b>Proposition 3</b></p> <p><math>P(B) = \frac{7}{12}</math>.</p>	<p><b>Proposition 4</b></p> <p><math>P(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}</math>. <math>\overline{A \cup C}</math> désigne l'événement contraire de <math>A \cup C</math>.</p>
<p><b>Question C</b></p> <p>Une variable aléatoire <math>X</math> suit une loi binomiale de paramètres <math>n</math> et <math>p</math> où <math>n</math> est égal à 4 et <math>p</math> appartient à <math>]0, 1[</math>.</p>	<p><b>Proposition 5</b></p> <p>Si <math>P(X = 1) = 8P(X = 0)</math> alors <math>p = \frac{2}{3}</math>.</p>	<p><b>Proposition 6</b></p> <p>Si <math>p = \frac{1}{5}</math> alors <math>P(X = 1) = P(X = 0)</math>.</p>
<p><b>Question D</b></p> <p>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire <math>X</math> qui suit la loi exponentielle de paramètre <math>\lambda = 0,07</math> sur <math>[0 ; +\infty[</math>. On rappelle que pour tout <math>t &gt; 0</math>, la probabilité de l'événement <math>(X \leq t)</math> est donnée par :</p> <p><math>P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx</math> (avec <math>\lambda = 0,07</math>).</p>	<p><b>Proposition 7</b></p> <p>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à <math>10^{-2}</math> près.</p>	<p><b>Proposition 8</b></p> <p>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à <math>10^{-2}</math> près.</p>



Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

**Proposition 1 :** « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est  $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$ . »

2. Une variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

On rappelle que pour tout réel  $a > 0$  :  $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$ .

**Proposition 2 :** « Le réel  $a$  tel que  $p(X > a) = p(X \leq a)$  est égal à  $\frac{\ln 2}{\lambda}$ . »





Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratifs ou techniques).

12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à  $10^{-4}$  près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0 ; 1]$ .

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15mn et 20mn ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).

Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

## B) Géométrie dans l'espace



France juin 2006 - exercice 1

### EXERCICE 1 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points  $A(2, 4, 1)$ ,  $B(0, 4, -3)$ ,  $C(3, 1, -3)$ ,  $D(1, 0, -2)$ ,  $E(3, 2, -1)$ ,  $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$ .

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.*

*Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.*

- 1) Une équation du plan (ABC) est :  $2x + 2y - z - 11 = 0$ .
- 2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
- 3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- 4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

- 5) Le point I est sur la droite (AB).



### EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $(P)$  le plan dont une équation est :  $2x + y - 3z + 1 = 0$ .

Soit A le point de coordonnées  $(1, 11, 7)$ .

**Proposition 1 :**

« le point H, projeté orthogonal de A sur  $(P)$ , a pour coordonnées  $(0, 2, 1)$  ».

### Amérique du sud novembre 2006 - exercice 1

#### EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :

A de coordonnées  $(3; 1; -5)$ , B de coordonnées  $(0; 4; -5)$ , C de coordonnées  $(-1; 2; -5)$  et D de coordonnées  $(2; 3; 4)$ .

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » ou « FAUX ». On attribue 0,5 point par réponse correcte et on retrace 0,25 point par réponse incorrecte.

L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.

2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne :  $x + y = 4$ .

3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :  $18x - 9y - 5z + 11 = 0$ .

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.

5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).

6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k \\ z = -\frac{1}{2} - 9k \end{cases}.$$

$k \in \mathbb{R}$



**EXERCICE 3 (4 points)***Commun à tous les candidats**Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.**Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève  $\frac{1}{2}$  point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.**Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne le point  $S(1; -2; 0)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y - 3z + 4 = 0$ .

1) Une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $S$  et perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  est :

$$A : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbf{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t, t \in \mathbf{R} \\ z = 3t \end{cases} \quad D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbf{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

2) Les coordonnées du point d'intersection  $H$  de la droite  $\mathcal{D}$  avec le plan  $\mathcal{P}$  sont :

$$A : (-4; 0; 0) \quad B : \left(\frac{6}{5}; -\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right) \quad C : \left(\frac{7}{9}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D : \left(\frac{8}{11}; -\frac{25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3) La distance du point  $S$  au plan  $\mathcal{P}$  est égale à :

$$A : \frac{\sqrt{11}}{3} \quad B : \frac{3}{\sqrt{11}} \quad C : \frac{9}{\sqrt{11}} \quad D : \frac{9}{11}$$

4) On considère la sphère de centre  $S$  et de rayon 3.

L'intersection de la sphère  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathcal{P}$  est égale :

$$A : \text{au point } I(1; -5; 0) \quad B : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$$

$$C : \text{au cercle de centre } S \text{ et de rayon } r = 2 \quad D : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$$

## Polynésie juin 2006 - exercice 2



### Exercice 2

5 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $A(0; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 0)$  et  $C(2; 0; 0)$ .

On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

**Proposition 1 :** « l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  est le plan (AIO) ».

**Proposition 2 :** « l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$  est la sphère de diamètre [BC] ».

**Proposition 3 :** « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

**Proposition 4 :** « le plan (ABC) a pour équation cartésienne  $2x + y + 2z = 4$  et le point H a pour coordonnées  $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$  ».

**Proposition 5 :** « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ »}.$$

# Amérique du sud novembre 2005 - exercice 3

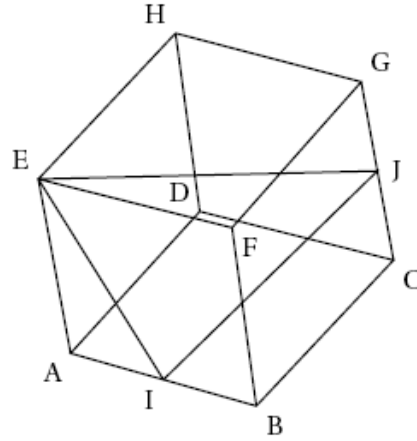
## EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 point. Toute réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube ABCDEFGHI, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.  
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 affirmations suivantes.



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos \frac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ , le paramètre $t$ décrivant $\mathbb{R}$ .	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$ , le paramètre $t$ décrivant $\mathbb{R}$ .	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$ .	



# Asie juin 2005 - exercice 1



## EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On appelle  $\mathcal{D}$  la droite d'équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases} \text{ et } \mathcal{P} \text{ le plan d'équation cartésienne } x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à $\mathcal{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
3.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -1)$ appartient à $\mathcal{P}$
5.	Le plan $Q_1$ d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan $Q_2$ d'équation cartésienne $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan $Q_3$ d'équation cartésienne $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $2\sqrt{3}$

# Nouvelle Calédonie novembre 2006 - exercice 4

## EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

### Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère :

- les points  $A(0; 0; 3)$ ,  $B(2; 0; 4)$ ,  $C(-1; 1; 2)$  et  $D(1; -4; 0)$
- les plans  $(P_1) : 7x + 4y - 3z + 9 = 0$  et  $(P_2) : x - 2y = 0$ .
- les droites  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a)	b)	c)	d)
1) Le plan $(P_1)$ est :	Le plan $(ABC)$	Le plan $(BCD)$	Le plan $(ACD)$	Le plan $(ABD)$
2) La droite $(\Delta_1)$ contient :	Le point $A$	Le point $B$	Le point $C$	Le point $D$
3) Position relative de $(P_1)$ et de $(\Delta_1)$ :	$(\Delta_1)$ est strictement parallèle à $(P_1)$	$(\Delta_1)$ est incluse dans $(P_1)$	$(\Delta_1)$ coupe $(P_1)$	$(\Delta_1)$ est orthogonale à $(P_1)$
4) Position relative de $(\Delta_1)$ et de $(\Delta_2)$ :	$(\Delta_1)$ est strictement parallèle à $(\Delta_2)$	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont confondues	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont sécantes	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont non coplanaires
5) L'intersection de $(P_1)$ et de $(P_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est :	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

### Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère la droite  $(D)$  passant par  $A(0; 0; 3)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(1; 0; -1)$  et la droite  $(D')$  passant par  $B(2; 0; 4)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{v}(0; 1; 1)$ .

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à  $(D)$  et à  $(D')$ , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

- On considère un point  $M$  appartenant à  $(D)$  et un point  $M'$  appartenant à  $(D')$ , définis par  $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$  et  $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Exprimer les coordonnées de  $M$ , de  $M'$  puis du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- Démontrer que la droite  $(MM')$  est perpendiculaire à  $(D)$  et à  $(D')$  si et seulement si le couple  $(a; b)$  est solution du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

- Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points  $M$  et  $M'$ , que nous noterons ici  $H$  et  $H'$ , tels que la droite  $(HH')$  soit bien perpendiculaire commune à  $(D)$  et à  $(D')$ . Montrer que  $HH' = \sqrt{3}$  unités de longueur.
- On considère un point  $M$  quelconque de la droite  $(D)$  et un point  $M'$  quelconque de la droite  $(D')$ .

- (a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1., démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3$$

- (b) En déduire que la distance  $MM'$  est minimale lorsque  $M$  est en  $H$  et  $M'$  est en  $H'$ .



## Nouvelle Calédonie novembre 2004 - exercice 2

### DEUXIEME EXERCICE (5 points)

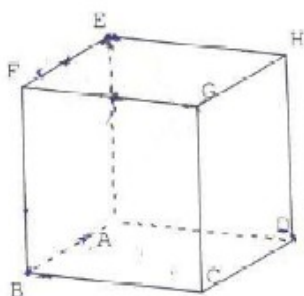
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe (page 4/4). Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V ( vrai ) ou F ( faux ) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent  $\frac{1}{2}$  point.



Soit  $ABCDEFGH$  un cube de côté 1.

On choisit le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On appelle  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[EF]$  et  $[FG]$ .

$L$  est le barycentre de  $\{(A,1);(B,3)\}$ .

Soit  $(\pi)$  le plan d'équation  $4x - 4y + 3z - 3 = 0$

1) Les coordonnées de  $L$  sont :

- a)  $(\frac{1}{4}; 0; 0)$  ☐    b)  $(\frac{3}{4}; 0; 0)$  ☐    c)  $(\frac{2}{3}; 0; 0)$  ☐

2) Le plan  $(\pi)$  est le plan

- a)  $(GLE)$  ☐    b)  $(LEJ)$  ☐    c)  $(GFA)$  ☐

3) Le plan parallèle au plan  $(\pi)$  passant par  $I$  coupe la droite  $(FB)$  en  $M$  de coordonnées

- a)  $(1; 0; \frac{1}{4})$  ☐    b)  $(1; 0; \frac{1}{5})$  ☐    c)  $(1; 0; \frac{1}{3})$  ☐

4)

- a) Les droites  $(EL)$  et  $(FB)$  sont sécantes en un point  $N$  qui est le symétrique de  $M$  par rapport à  $B$ . ☐
- b) Les droites  $(EL)$  et  $(IM)$  sont parallèles. ☐
- c) Les droites  $(EL)$  et  $(IM)$  sont sécantes. ☐

5) Le volume du tétraèdre  $FIJM$  est :

- a)  $\frac{1}{36}$  ☐    b)  $\frac{1}{48}$  ☐    c)  $\frac{1}{24}$  ☐





**EXERCICE 2 (5 points)**

Pour chacune des 5 questions, une seule des trois propositions est exacte.

**Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(3, 1, 3)$  et  $B(-6, 2, 1)$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  admet pour équation cartésienne  $x + 2y + 2z = 5$ .

1. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|4\vec{MA} - \vec{MB}\| = 2$  est :

- (a) un plan de l'espace      (b) une sphère      (c) l'ensemble vide

2. Les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$  sont :

- (a)  $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$       (b)  $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$       (c)  $\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

3. La sphère de centre  $B$  et de rayon 1 :

- (a) coupe le plan  $\mathcal{P}$  suivant un cercle  
(b) est tangente au plan  $\mathcal{P}$   
(c) ne coupe pas le plan  $\mathcal{P}$

4. On considère la droite  $\mathcal{D}$  de l'espace passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1, 2, -1)$

$$\text{et la droite } \mathcal{D}' \text{ d'équations paramétriques } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont :

- (a) coplanaires et parallèles      (b) coplanaires et sécantes      (c) non coplanaires

5. L'ensemble des points  $M$  de l'espace équidistants des points  $A$  et  $B$  est :

(a) la droite d'équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(b) le plan d'équation cartésienne  $9x - y + 2z + 11 = 0$

(c) le plan d'équation cartésienne  $x + 7y - z - 7 = 0$

**EXERCICE 4** (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée.

Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point.

Toute réponse juste rapporte 0,5 point.

Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Soit  $P$  le plan d'équation  $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ .

a) La distance du point  $O$  au plan  $P$  est égale à 1.

b) La distance du point  $O$  au plan  $P$  est égale à  $\frac{1}{\sqrt{29}}$ .

c) Le vecteur  $\vec{n}(1, \frac{3}{2}, 2)$  est un vecteur normal au plan  $P$ .

d) Le plan  $Q$  d'équation  $-5x + 2y + z = 0$  est parallèle au plan  $P$ .

2) On désigne par  $P$  le plan d'équation  $2x + y - z = 0$ , et par  $D$  la droite passant par le point

$A(1, 1, 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1, -4, -2)$ .

a) La droite  $D$  est parallèle au plan  $P$ .

b) La droite  $D$  est orthogonale au plan  $P$ .

c) La droite  $D$  est sécante avec le plan  $P$ .

d) Un système d'équations paramétriques de  $D$  est 
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

3) On désigne par  $E$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que :  $x + y + z = 3$  et  $2x - z = 1$ .

Soit le point  $A(1, 1, 1)$ .

a) L'ensemble  $E$  contient un seul point, le point  $A$ .

b) L'ensemble  $E$  est une droite passant par  $A$ .

c) L'ensemble  $E$  est un plan passant par  $A$ .

d) L'ensemble  $E$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}(1, -3, 2)$ .

4)  $ABCD$  est un tétraèdre quelconque. Soit  $P$  le plan passant par  $A$  et orthogonal à la droite  $(BC)$ .

a) Le plan  $P$  contient toujours le point  $D$ .

b) Le plan  $P$  contient toujours la hauteur  $(AH)$  du triangle  $ABC$ .

c) Le plan  $P$  est toujours l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\vec{BM} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}.$$

d) Le plan  $P$  est toujours le plan médiateur du segment  $[BC]$ .

## Sujets zéro 2003 - exercice 8

### Exercice n° 8 (enseignement obligatoire)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification.

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace.

L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$  est :

- a) l'ensemble vide      b) un plan      c) une sphère

2. On considère les points  $E(0; 1; -2)$  et  $F(2; 1; 0)$ .

Les coordonnées du barycentre  $G$  de  $(E; 1)$  et  $(F; 3)$  sont :

- a)  $G(6; 4; -2)$       b)  $G(1,5; 1; -0,5)$       c)  $G(0,5; 1; 1,5)$

3. Soit  $d$  la droite de représentation paramétrique  $x = 2 - t; y = 3t; z = -3, \quad t \in \mathbf{R}$ .

On considère les points  $A(2; 3; -3)$ ,  $B(2; 0; -3)$  et  $C(0; 6; 0)$ . On a :

- a)  $d = (AB)$       b)  $d = (BC)$       c)  $d \neq (AB)$  et  $d \neq (BC)$  et  $d \neq (CA)$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives

$$x = 2 + t; y = 1 - t; z = 1 + t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x = -t'; y = -2 - 1,5t'; z = 3 + t', \quad t' \in \mathbf{R}$$

admettent comme point commun :

- a)  $I(3; 0; 2)$       b)  $J(2; 1; 1)$       c)  $K(0; 2; -3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$x = 1; y = 1 + 2t; z = 1 + t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$x = 3 - 2t'; y = 7 - 4t'; z = 2 - t', \quad t' \in \mathbf{R}$$

sont :

- a) parallèles      b) sécantes      c) non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique  $x = -4t; y = 1 + 3t; z = 2 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}$  et le plan d'équation  $x - 2y + 5z - 1 = 0$  sont :

- a) orthogonaux      b) parallèles      c) ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que  $x - y + 2z - 1 = 0$  et  $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$  est :

- a) l'ensemble vide      b) une droite      c) un plan



**EXERCICE 2 (5 points)**

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $(d)$  dont un système d'équations paramétriques est 
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \frac{3t}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note A le point de coordonnées  $(2, -1, 1)$ , B le point de coordonnées  $(4, -2, 2)$  et C le point de  $(d)$  d'abscisse 1.

**1. Proposition 1**

« La droite  $(d)$  est parallèle à l'axe  $(O ; \vec{j})$  ».

**2. Proposition 2**

« Le plan  $P$  d'équation  $x + 3z - 5 = 0$  est le plan passant par A et orthogonal à  $(d)$  ».

**3. Proposition 3**

« La mesure de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est  $\frac{\pi}{3}$  radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés  $(A ; -1)$ ,  $(B ; 1)$  et  $(C ; 1)$ .

**Proposition 4**

« Les segments  $[AG]$  et  $[BC]$  ont le même milieu ».

**5. Proposition 5**

« La sphère de centre C et passant par B coupe le plan  $P$  d'équation  $x + 3z - 5 = 0$  ».

**Exercice 2 (5 points)**

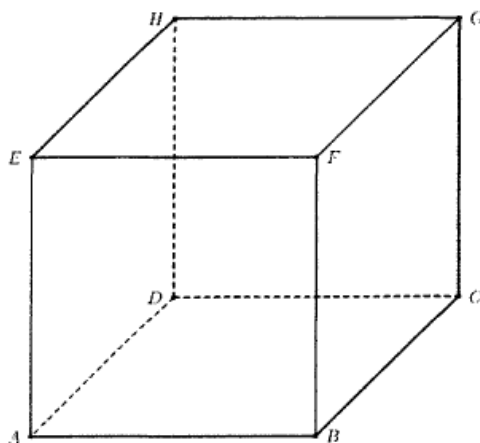
Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

**Partie B**

On considère le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1, représenté ci-dessous.

**Proposition 5 :** « le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan  $(BDE)$  ».

**Proposition 6 :** « les droites  $(EB)$  et  $(ED)$  sont perpendiculaires ».





**Exercice 1 (4 points)**  
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points :  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(-1; 2; 4)$ ,  $C(0; -2; 3)$ ,  $D(1; 1; -2)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x - 2y + z + 1 = 0$ .

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** ou **FAUX** correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

- 1) Affirmation 1 : les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.
- 2) Affirmation 2 : la droite  $(AC)$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .
- 3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan  $(ABD)$  est :  $x + 8y - z - 11 = 0$ .
- 4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite  $(AC)$  est : 
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$
- 5) Affirmation 5 : les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.
- 6) Affirmation 6 : la distance du point  $C$  au plan  $\mathcal{P}$  est égale à  $4\sqrt{6}$ .
- 7) Affirmation 7 : la sphère de centre  $D$  et de rayon  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  est tangente au plan  $\mathcal{P}$ .
- 8) Affirmation 8 : le point  $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$  est le projeté orthogonal du point  $C$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .



**Exercice 1 (4 points)**  
Commun à tous les candidats

**A – Vrai ou faux ?**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  désigne l'ensemble des points communs aux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .
- L'écriture  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$  signifie que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  n'ont aucun point commun.

1. Si  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :  

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset,$$
 alors on peut conclure que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_3$  vérifient :  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$ .
2. Si  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :  

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$
 alors on peut conclure que  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont tels que :  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$  et  $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$ .
3. Si  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :  

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$
 alors on peut conclure que  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  vérifient :  $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$ .
4. Si  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont deux plans distincts et  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace vérifiant :  

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset,$$
 alors on peut conclure que  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{D}$  vérifient :  $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ .

**B – Intersection de trois plans donnés**

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathcal{P}_1$  d'équation  $x + y - z = 0$ ,
- $\mathcal{P}_2$  d'équation  $2x + y + z - 3 = 0$ ,
- $\mathcal{P}_3$  d'équation  $x + 2y - 4z + 3 = 0$ .

1. Justifier que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée  $\Delta$ .
2. En déduire la nature de l'intersection  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ .

**EXERCICE 3**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

*Une réponse exacte rapporte 1 point ;**une réponse inexacte enlève 0,25 point ;**l'absence de réponse est comptée 0 point.**Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.*L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que :  $\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$  est :

Réponse A : l'ensemble vide

Réponse B : une droite

Réponse C : un plan

Réponse C : réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 - t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad \text{sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes

Réponse B : confondues

Réponse C : sécantes

Réponse C : non coplanaires

3. La distance du point  $A(1; -2; 1)$  au plan d'équation  $-x + 3y - z + 5 = 0$  est égale à :

Réponse A :  $\frac{3}{11}$ Réponse B :  $\frac{3}{\sqrt{11}}$ Réponse C :  $\frac{1}{2}$ Réponse C :  $\frac{8}{\sqrt{11}}$ 

4. Le projeté orthogonal du point  $B(1; 6; 0)$  sur le plan d'équation  $-x + 3y - z + 5 = 0$  a pour coordonnées :

Réponse A :  $(3; 1; 5)$ Réponse B :  $(2; 3; 1)$ Réponse C :  $(3; 0; 2)$ Réponse C :  $(-2; 3; -6)$



Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points :

$A$  de coordonnées  $(1, 1, 0)$ ,  $B$  de coordonnées  $(2, 0, 3)$ ,  $C$  de coordonnées  $(0, -2, 5)$  et  $D$  de coordonnées  $(1, -5, 5)$ .

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

**Proposition 1 :** L'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  tels que  $y = 2x + 4$  est une droite.

**Proposition 2 :** La transformation qui, à tout point  $M$  de l'espace associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$  est l'homothétie de centre  $G$ , où  $G$  désigne le barycentre du système  $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$ , et de rapport 3.

**Proposition 3 :**  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points coplanaires.

**Proposition 4 :** La sphère de centre  $\Omega$  de coordonnées  $(3, 3, 0)$  et de rayon 5 est tangente au plan d'équation :  $2x + 2y + z + 3 = 0$ .

France juin 2009 (annulé) – exercice 1



Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(1; 1; 0)$ ,  $C(9; -1; -2)$ ,  $S(1; 1; 1)$ .

On admet qu'une équation du plan  $(ABC)$  est  $x + 2y + 2z - 3 = 0$ .

1. Une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$  est

a.  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$

b.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$

b.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \text{ réel})$

2. Les coordonnées du point  $S'$  symétrique du point  $S$  par rapport au plan  $(ABC)$  sont :

a.  $\left(\frac{10}{9}; \frac{11}{9}; \frac{10}{9}\right)$

b.  $\left(\frac{5}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$

c.  $\left(\frac{7}{9}; \frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right)$

3. Le triangle  $ABC$  est :

a. isocèle

b. rectangle en  $A$

c. rectangle en  $B$

4. L'ensemble des points  $M$  de l'espace vérifiant  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$  est :

a. un plan passant par  $S$

b. une sphère passant par  $S$

c. une sphère de centre  $S$





L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$  est parallèle au plan dont une équation cartésienne est :  $x + 2y + z - 3 = 0$ .

2. Les plans  $P, P', P''$  d'équations respectives  $x - 2y + 3z = 3$ ,  $2x + 3y - 2z = 6$  et  $4x - y + 4z = 12$  n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$  et

$$\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbf{R} \text{ sont sécantes.}$$

4. On considère les points :  
 $A$ , de coordonnées  $(-1, 0, 2)$ ,  $B$ , de coordonnées  $(1, 4, 0)$ , et  $C$ , de coordonnées  $(3, -4, -2)$ .  
 Le plan  $(ABC)$  a pour équation  $x + z = 1$ .
5. On considère les points :  
 $A$ , de coordonnées  $(-1, 1, 3)$ ,  $B$ , de coordonnées  $(2, 1, 0)$ , et  $C$ , de coordonnées  $(4, -1, 5)$ .  
 On peut écrire  $C$  comme barycentre des points  $A$  et  $B$ .

## C) Nombres complexes

Amérique du Nord juin 2005 - exercice 1



### EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives  $-2 + 3i$ ,  $-3 - i$  et  $2,08 + 1,98i$ . Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle                      (b) : rectangle et non isocèle  
(c) : rectangle et isocèle                              (d) : ni rectangle ni isocèle

2. A tout nombre complexe  $z \neq -2$ , on associe le nombre complexe  $z'$  défini par :  $z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$

L'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z'| = 1$  est :

(a) : un cercle de rayon 1                              (b) : une droite  
(c) : une droite privée d'un point                      (d) : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.  
L'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $z'$  est un réel est :

(a) : un cercle    (b) : une droite  
(c) : une droite privée d'un point                      (d) : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe  $i$ .

L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  est :

(a) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$                       (b) :  $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$   
(c) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$                       (d) :  $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**EXERCICE 2 (5 points)**

*Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité*

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1) Soit  $z$  le nombre complexe de module  $\sqrt{2}$  et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ . On a alors :

A :  $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$ .

C :  $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$ .

B :  $z^{14} = 64 - 64i$ .

D :  $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$ .

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe  $4i$ . Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z - 3| = |3 - 4i|$ .

A : (E) est la médiatrice du segment [ST].

B : (E) est la droite (ST).

C : (E) est le cercle de centre  $\Omega$ , d'affixe  $3 - 4i$ , et de rayon 3.

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

### Antilles juin 2004 - exercice 3



#### EXERCICE 3

**Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose  $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ .

1. La forme algébrique de  $z^2$  est :

A :  $2\sqrt{2}$     B :  $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$     C :  $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$     D :  $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2.  $z^2$  s'écrit sous forme exponentielle :

A :  $4e^{i\frac{\pi}{4}}$     B :  $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$     C :  $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$     D :  $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3.  $z$  s'écrit sous forme exponentielle :

A :  $2e^{i\frac{2\pi}{8}}$     B :  $2e^{i\frac{\pi}{8}}$     C :  $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$     D :  $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4.  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  sont les cosinus et sinus de :

A :  $\frac{7\pi}{8}$     B :  $\frac{5\pi}{8}$     C :  $\frac{3\pi}{8}$     D :  $\frac{\pi}{8}$

### Centres étrangers juin 2006 - exercice 1



#### Exercice 1 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

#### Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si  $z$  est un nombre complexe,  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$  et  $|z|$  désigne le module de  $z$ .

- 1) Si  $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ , alors  $z^4$  est un nombre réel.
- 2) Si  $z + \bar{z} = 0$ , alors  $z = 0$ .
- 3) Si  $z + \frac{1}{z} = 0$ , alors  $z = i$  ou  $z = -i$ .
- 4) Si  $|z| = 1$  et si  $|z + z'| = 1$ , alors  $z' = 0$ .



## EXERCICE 1

4 points

## Commun tous les candidats

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Q1	Pour tout $n$ entier naturel non nul, pour tout réel $\theta$ , $(e^{i\theta})^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\cos(\theta^n) + i \sin(\theta^n)$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre $z$ est égale à :	$\frac{z + \bar{z}}{2}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\frac{z - \bar{z}}{2i}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\frac{z - \bar{z}}{2}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q3	Soit $z$ un complexe tel que $z = x + iy$ ( $x$ et $y$ réels). Si $z$ est un imaginaire pur, alors $ z ^2$ est égal à :	$y^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$-y^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$-z^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives $a$ , $b$ et $c$ telles que $\frac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$ , alors :	$BC = 2 AC$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai
		$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA^2$	<input type="checkbox"/> Faux <input type="checkbox"/> Vrai

**Exercice 3 (3 points)**

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A(-2 ; 5) et de rayon  $\sqrt{3}$ .  
Son affixe  $z$  vérifie :
  - (a)  $|z - 2 + 5i|^2 = 3$
  - (b)  $|z + 2 - 5i|^2 = 3$
  - (c)  $|z - 2 + 5i| = 3$ .
  
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ , deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe  $z$  est telle que les nombres complexes  $\frac{z-b}{c-a}$  et  $\frac{z-c}{b-a}$  sont imaginaires purs.
  - (a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
  - (b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB]
  - (c) M est l'orthocentre du triangle ABC
  
3. Soit A et B les points d'affixes respectives  $1 + i$  et  $5 + 4i$ , et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note  $z_G$  son affixe.
  - (a)  $|z_G - 3 - 2,5i| = \frac{5}{6}$
  - (b)  $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$
  - (c)  $z_G - (3+2,5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$



**Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)**

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ . L'écriture algébrique de  $z$  est :

☐  $\frac{8}{3} - 2i$     
 ☐  $-\frac{8}{3} - 2i$     
 ☐  $\frac{8}{3} + 2i$     
 ☐  $-\frac{8}{3} + 2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  vérifiant  $|z - 1| = |z + i|$  est la droite d'équation :

☐  $y = x - 1$     
 ☐  $y = -x$     
 ☐  $y = -x + 1$     
 ☐  $y = x$

3. Soit  $n$  un entier naturel. Le nombre  $(1 + i\sqrt{3})^n$  est réel si, et seulement si,  $n$  s'écrit sous la forme :

☐  $3k + 1$     
 ☐  $3k + 2$     
 ☐  $3k$     
 ☐  $6k$

(avec  $k$  entier naturel)

4. Soit l'équation (E) :  $z = \frac{6 - z}{3 - z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Une solution de (E) est :

☐  $-2 - \sqrt{2}i$     
 ☐  $2 + \sqrt{2}i$     
 ☐  $1 - i$     
 ☐  $-1 - i$

5. Soit deux points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = i$  et  $z_B = \sqrt{3}$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . L'affixe  $z_C$  du point  $C$  tel que  $ABC$  soit un triangle équilatéral avec  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$  est :

☐  $-i$     
 ☐  $2i$     
 ☐  $\sqrt{3} + i$     
 ☐  $\sqrt{3} + 2i$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  vérifiant la relation  $\arg\left(\frac{z + 2}{z - 2i}\right) = \frac{\pi}{2}$  est inclus dans :

- ☐ La droite d'équation  $y = -x$   
☐ Le cercle de centre  $I(1 + i)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$   
☐ La droite d'équation  $y = x$   
☐ Le cercle de diamètre  $[AB]$ ,  $A$  et  $B$  étant les points d'affixes respectives  $z_A = -2$  et  $z_B = 2i$ .



**EXERCICE 1 (4 points)**  
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ .

1. Une solution de l'équation  $2z + \bar{z} = 9 + i$  est :  
 a) 3                                      b)  $i$                                       c)  $3 + i$
2. Soit  $z$  un nombre complexe ;  $|z + i|$  est égal à :  
 a)  $|z| + 1$                                       b)  $|z - 1|$                                       c)  $|i\bar{z} + 1|$
3. Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\theta$ . Un argument de  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$  est :  
 a)  $-\frac{\pi}{3} + \theta$                                       b)  $\frac{2\pi}{3} + \theta$                                       c)  $\frac{2\pi}{3} - \theta$
4. Soit  $n$  un entier naturel. Le complexe  $(\sqrt{3} + i)^n$  est un imaginaire pur si et seulement si :  
 a)  $n = 3$                                       b)  $n = 6k + 3$  avec  $k$  entier relatif                                      c)  $n = 6k$  avec  $k$  entier relatif
5. Soient  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $i$  et  $-1$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - i| = |z + 1|$  est :  
 a) la droite  $(AB)$                                       b) le cercle de diamètre  $[AB]$                                       c) la droite perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $O$
6. Soit  $\Omega$  le point d'affixe  $1 - i$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  vérifiant  $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$  a pour équation :  
 a)  $y = -x + 1$                                       b)  $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$                                       c)  $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$  avec  $\theta$  réel
7. Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives 4 et  $3i$ . L'affixe du point  $C$  tel que le triangle  $ABC$  soit isocèle avec  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$  est :  
 a)  $1 - 4i$                                       b)  $-3i$                                       c)  $7 + 4i$
8. L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $\frac{z-2}{z-1} = z$  est :  
 a)  $\{1 - i\}$                                       b) L'ensemble vide                                      c)  $\{1 - i, 1 + i\}$

**Exercice 2 (5 points)**

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

**Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit  $z$  un nombre complexe d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .

**Proposition 1 :** «  $z^{100}$  est un nombre réel ».

2. Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  différente de 1 du plan telle que  $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$ .

**Proposition 2 :** « l'ensemble  $(E)$  est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit  $r$  la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et dont le centre  $K$  a pour affixe  $1+i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3 :** « l'image du point  $O$  par la rotation  $r$  a pour affixe  $(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$  ».

4. On considère l'équation  $(E)$  suivante :  $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$ .

**Proposition 4 :** « l'équation  $(E)$  a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».



## Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A et  $\Omega$  d'affixes respectives :  $a = -1 + \sqrt{3} + i$  et  $\omega = -1 + 2i$ .

On appelle  $r$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

I. Placer sur une figure les points A et  $\Omega$ , l'image B du point A par  $r$ , l'image C du point B par  $r$  et l'image D du point A par  $h$ .

II. On note  $b$ ,  $c$ , et  $d$  les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$ a - \omega  =$	2	4	$\sqrt{3} - i$
2.	$\arg(a - \omega) =$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

3.	$(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega C}) =$	$\arg((\omega - c)i)$	$(-\vec{v}, \overrightarrow{C\Omega})$	$\frac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\frac{1}{3}(a + b + c)$	$a + b + c$	$b - 2i$

5.	$\frac{b - d}{a - d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
6.	Le point D est	l'image de $\Omega$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$ .	l'image de $\Omega$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	l'image de $\Omega$ par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

**EXERCICE 1 : (4 points)**

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- 1) Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :  $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$ ,  $\theta$  étant un nombre réel.
  - a)  $(E)$  est une droite passant par le point d'affixe  $2 - 2i$ .
  - b)  $(E)$  est le cercle de centre d'affixe  $-1 + 2i$  et de rayon 1.
  - c)  $(E)$  est le cercle de centre d'affixe  $1 - 2i$  et de rayon 1.
  - d)  $(E)$  est le cercle de centre d'affixe  $1 - 2i$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .
- 2) Soit  $f$  l'application du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = -iz - 2i$ .
  - a)  $f$  est une homothétie.
  - b) Le point d'affixe  $-1 - 2i$  est un antécédent du point d'affixe  $i$ .
  - c)  $f$  est la rotation de centre le point d'affixe  $1 + i$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
  - d)  $f$  est la rotation de centre le point d'affixe  $-1 - i$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
- 3) Soit  $(F)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$ .  
Soient les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $1 - i$ ,  $-1 + 2i$  et  $-1 - 2i$ .
  - a)  $C$  est un point de  $(F)$ .
  - b)  $(F)$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .
  - c)  $(F)$  est la médiatrice du segment  $[AC]$ .
  - d)  $(F)$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ .
- 4) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z + |z|^2 = 7 + i$ .  
Cette équation admet :
  - a) Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
  - b) Une solution réelle.
  - c) Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
  - d) Une solution qui a pour partie imaginaire 2.



3. Soit le nombre complexe  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3 :** « Si l'entier naturel  $n$  est un multiple de 3 alors  $z^n$  est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , le point A d'affixe  $a = 2 - i$  et le point B d'affixe  $b = \frac{1+i}{2}a$ .

**Proposition 4 :** « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , à tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle on associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que  $z' = \frac{-10}{\bar{z}}$  où  $\bar{z}$  désigne le nombre conjugué de  $z$ .

**Proposition 5 :** « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »