BAC S 2013
Mathématiques Obligatoire
Nouvelle-Calédonie – Mars 2014
Correction

Les passages en italiques sont des explications données à des fins de compréhension. Ils ne sont pas à reproduire sur une copie.

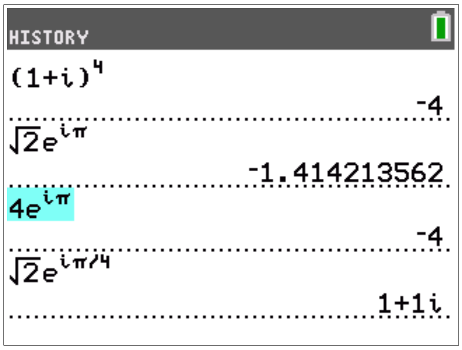
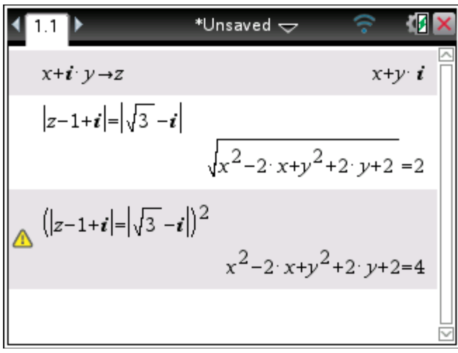
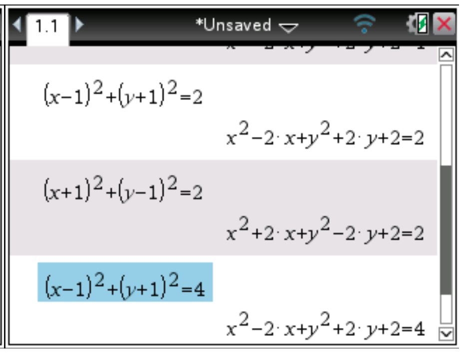
Table des matières

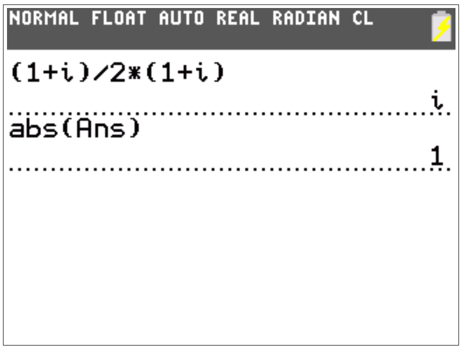
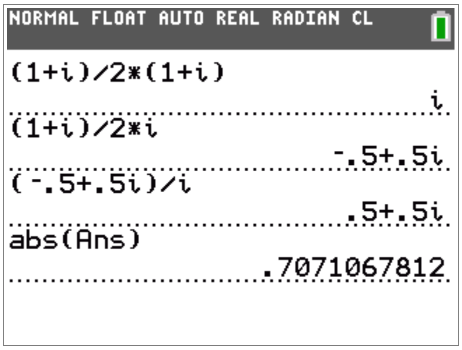
Exercice 1 :........1
Exercice 2 :........6
Partie A........6
Partie B........7
Partie C........8
Exercice 3 :........9
Partie A........9
Partie B........9
Partie C........12
Exercice 4........13

Exercice 1 :

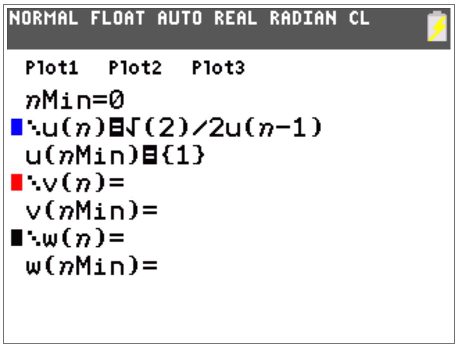
Cet exercice est un QCM sans justification et n'est donc pas forcément à traiter comme un problème.
En colonne de droite sont proposées des démarches possibles payantes en temps dans ce contexte.
En colonne de gauche, vous trouverez les justifications qui seraient exigibles dans un problème, à des fins de compréhension.

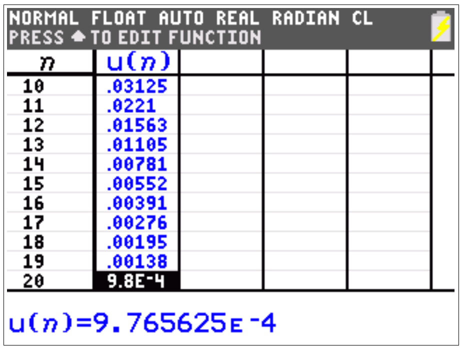
	Démarche problème	*Démarche QCM sans justification à une seule réponse juste*
1)	*Pour déterminer l'écriture exponentielle de z, cherchons-en le module et un argument :* $\|z\|=\|(1+i)^4\|=\|1+i\|^4=\sqrt{1^2+1^2}^4=\sqrt{1+1}^4=\sqrt{2}^4=2^2=4$ $arg(z)=arg\left((1+i)^4\right)+2k\pi=4\,arg(1+i)+2k\pi$ *avec k entier.* *Cherchons donc un argument* θ *de 1+i :* $\|1+i\|=\sqrt{2}$ $\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *D'après le cercle trigonométrique,* $\theta=\frac{\pi}{4}$.	*Prendre sa calculatrice graphique et calculer* $(1+i)^4$. *Si le résultat est parmi les réponses, c'est fini.* *Sinon, calculer une par une chaque réponse proposée, jusqu'à la première donnant exactement le même résultat.*

	Donc, $\arg(z)=4\times\frac{\pi}{4}+2k\pi=\pi+2k\pi$ *En conclusion,* $z=4e^{i\pi}$. Réponse b).	
2)	$\lvert z-1+i\rvert=\lvert\sqrt{3}-i\rvert$ $\Leftrightarrow\lvert x+iy-1+i\rvert=\lvert\sqrt{3}-i\rvert$ $\Leftrightarrow\lvert x-1+i(y+1)\rvert=\lvert\sqrt{3}-i\rvert$ $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{3+1}$ $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{4}$ *Ce qui implique* $(x-1)^2+(y+1)^2=4$. Réponse c).	*Prendre sa calculatrice formelle, définir* $z=x+iy$ *et taper la relation.* *Transformer la relation pour la faire ressembler aux réponses (ici, mise au carré pour supprimer la racine).* *Si la relation-résultat est parmi les réponses, c'est fini.*
		 *Sinon, taper les relation-réponses proposées jusqu'à la première donnant exactement le même résultat.*
3)	*Il n'y a pas ici de question commune aux réponses proposées. Donc nous les traitons une par une...*	*... jusqu'à trouver la bonne.*
3) a)	$Z_1=\frac{1+i}{2}Z_0=\frac{1+i}{2}\times(1+i)=\frac{(1+i)^2}{2}$ $=\frac{1^2+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$ *Donc* $OM_1=\lvert Z_1\rvert=\lvert i\rvert=1$ *Pour n=1, le point* M_n *d'affixe* Z_n *n'est donc pas sur le cercle de centre O et de rayon* $\sqrt{2}$ *, mais sur le cercle de centre O et de rayon 1.* *Donc, faux.*	*Placer les premiers points* M_0 *et* M_1 *dans un plan complexe.* *Tracer le cercle de centre O et de rayon* $\sqrt{2}$. *Si* M_0 *et* M_1 *semblent être sur le cercle, placer des points supplémentaires pour voir si la propriété semble se conserver.* *Si un seul point n'est pas sur le cercle, la propriété est fausse.*

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td>Si tous les points semblent être sur le cercle, confirmer la propriété à la calculatrice graphique avec des calculs-exemples pour n=0, 1, 2... de $|Z_n|$.
Si on trouve le bon résultat ($\sqrt{2}$) plusieurs fois, c'est bon signe.
Mais si il rate une seule fois, c'est faux.</td></tr>
<tr><td>3) b)</td><td>$$\frac{Z_{n+1}}{Z_n}=\frac{\frac{1+i}{2}Z_n}{Z_n}=\frac{1+i}{2}$$
Donc
$$\frac{OM_{n+1}}{OM_n}=\frac{|Z_{n+1}|}{|Z_n|}=\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{|1+i|}{|2|}=\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
D'où $OM_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}OM_n$ et $OM_{n+1}\neq OM_n$.
Le triangle OM_nM_{n+1} n'est pas équilatéral, c'est faux.

</td><td>Placer les premiers points M_0 et M_1 dans un plan complexe.
Si OM_0M_1 a l'air équilatéral, placer des points supplémentaires pour voir si la propriété semble se conserver sur OM_1M_2 , OM_2M_3...
Si un seul triangle n'a pas l'air équilatéral, la propriété est forcément fausse.

Si tous les triangles semblent équilatéraux, confirmer avec des calculs-exemples pour n=0, 1, 2... de $\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right|$ à la calculatrice graphique.
Si on trouve le bon résultat (1) plusieurs fois, c'est bon signe.
Mais si il rate une seule fois, c'est faux.</td></tr>
<tr><td>3) c)</td><td>$Z_0=1$ et $Z_{n+1}=\frac{1+i}{2}Z_n$.
Si (U_n) est définie par $U_n=|Z_n|$, alors on a :
$U_0=|Z_0|=|1+i|=\sqrt{2}$
$U_n=|Z_n|=\left|\frac{1+i}{2}Z_n\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times|Z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}U_n$
(U_n) est donc une suite géométrique de raison
$q=\frac{\sqrt{2}}{2}$
Comme -1<q<1, la suite (U_n) est donc convergente vers 0.
Réponse c).</td><td>Sur la calculatrice, définir la suite (U_n).
En demander un tableau de valeurs.
Parcourir un bon nombre de termes (10, 20...) pour constater la convergence ou l'absence de convergence.</td></tr>
</table>





3) d)

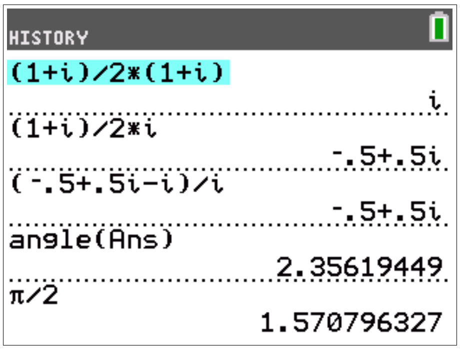
$$\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n} = \frac{\frac{1+i}{2}Z_n - Z_n}{Z_n} = \frac{Z_n\left(\frac{1+i}{2}-1\right)}{Z_n}$$
$$= \frac{1+i}{2}-1 \qquad = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}-1$$
$$= -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

Ce nombre n'est pas un imaginaire pur et n'admet donc pas pour argument $\frac{\pi}{2}$.

C'est faux.

Normalement, pas à faire puisque la réponse précédente est juste.

Placer les premiers points M_0 et M_1 dans un plan complexe.
Si OM_0M_1 a l'air rectangle en O avec $\left(\overrightarrow{OM_0};\overrightarrow{OM_1}\right)=\frac{\pi}{2}$ *, placer des points supplémentaires pour voir si la propriété semble se conserver sur OM_1M_2 , OM_2M_3...*
Si un seul triangle ne vérifie pas cette propriété, celle-ci est fausse.



Si tous les triangles semblent la vérifier, confirmer avec des calculs-exemples pour n=0, 1, 2... de $arg\left(\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}\right)$ *à la calculatrice graphique.*
Si on trouve le bon résultat ($\frac{\pi}{2}$ *) plusieurs fois, c'est bon signe.*
Mais si il rate une seule fois, c'est faux.

4)

Il n'y a pas ici de question commune aux réponses proposées. Donc nous les traitons une par une...

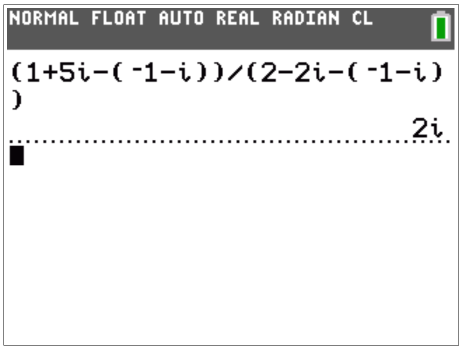
... jusqu'à trouver la bonne.

4) a)

$$Z = \frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = \frac{1+5i-(-1-i)}{2-2i-(-1+i)}$$
$$= \frac{1+5i+1+i}{2-2i+1+i} = \frac{2+6i}{3-i}$$
$$= \frac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+2i+18i-6}{3^2+1^2}$$
$$= \frac{20i}{9+1} = \frac{20i}{10} = 2i$$

Donc, faux.

Effectuer le calcul à la calculatrice graphique.

		
4) b)	$\frac{AC}{AB}=\vert Z\vert=\vert 2i\vert=2$ *Donc AC=2AB et AC≠AB.* *Le triangle ABC n'est pas isocèle en A, c'est faux.*	*Normalement conséquence directe du calcul précédent.* *Sinon, placer les points A, B, C dans le plan complexe.* *Si le triangle n'est pas isocèle en A, c'est faux.* *Si le triangle a l'air isocèle en A, vérifier à la calculatrice si* $\vert Z\vert=1$.
4) c)	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=arg\,Z+2k\pi=arg(2i)+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ *Donc le triangle ABC est rectangle en A.* Réponse c).	*Normalement conséquence directe du calcul précédent.* *Sinon, placer les points A, B, C dans le plan complexe.* *Si le triangle n'est pas rectangle en A, c'est faux.* *Si le triangle a l'air rectangle en A, vérifier à la calculatrice si* $arg\,Z=\pm\frac{\pi}{2}+2\text{k}\pi$.
4) d)	$BM=\vert Z_B-Z\vert=\vert 2-2i-2i\vert=\vert 2-4i\vert$ $=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $CM=\vert Z_C-Z\vert=\vert 1+5i-2i\vert=\vert 1+3i\vert$ $=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ *Donc BM≠CM.* *C'est faux.*	*Normalement pas à faire puisque la réponse précédente est juste.* *Sinon, placer les points B, C, M dans le plan complexe.* *Si M n'est pas sur la médiatrice de [BC], c'est faux.* *Si M a l'air d'être sur la médiatrice de [BC], vérifier à la calculatrice si* $\vert Z_B-Z\vert=\vert Z_C-Z\vert$.

Exercice 2 :

Partie A

1) La fonction f utilisée dans $H(x)=P(-x\leq X\leq x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$ joue le rôle de densité de probabilité de la variable aléatoire X.

2) $H(0)=\int_{-0}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{0} f(t)dt=0$

$\lim_{x\to+\infty} H(x)=\lim_{x\to+\infty} P(-x\leq X\leq x)=P(X\in\mathbb{R})=1$

3) Par relation de Chasles sur les intégrales, pour tout x réel, on a :

$H(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$

Si x≥0, $\int_{0}^{x} f(t)dt$ est l'aire du domaine délimité par :

- les deux droites verticales coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et x
- l'axe des abscisses
- la courbe de la fonction f

Si x≥0 (c'est-à-dire -x≤0), $\int_{-x}^{0} f(t)dt$ est l'aire du domaine délimité par :

- les deux droites verticales coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et -x
- l'axe des abscisses
- la courbe de la fonction f

Or, pour tout t réel, $f(-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-t)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}=f(t)$.

Il s'en suit que la fonction f est paire et que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Les deux domaines ci-dessus sont également symétriques et ont donc même aire :

$\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{0} f(t)dt$

Donc pour tout réel x>0, $H(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=2\int_{0}^{x} f(t)dt$.

4) f est continue donc intégrable. Notons F une de ses primitives.
On peut écrire pour tout réel x≥0 : $H(x)=2(F(x)-F(0))$
Donc pour tout réel x≥0, $H'(x)=2F'(x)=2f(x)$.
Sur $[0;+\infty[$, H' admet donc pour dérivée 2f.

La fonction exponentielle étant toujours strictement positive, les fonctions f et H' le sont également.
D'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
H'		+	
H	0	$\nearrow$	1

5) La fonction H est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ avec H(0)=0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=1$.
H réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ vers [0;1[.
Pour tout réel α tel que $0\leq\alpha<1$, $0\geq-\alpha>-1$ et $1\geq1-\alpha>0$.

Donc pour tout réel $\alpha\in]0;1[$, $1-\alpha\in]0;1[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tour réel $\alpha\in]0;1[$, il existe alors un unique réel $\chi_\alpha\in]0;+\infty[$ tel que $H(\chi_\alpha)=1-\alpha$, c'est-à-dire $P(-\chi_\alpha\leq X\leq\chi_\alpha)=1-\alpha$, cqfd.

Partie B

1) $P_D(A)=P\dfrac{(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}6\times0{,}046}{0{,}05}=0{,}552$

2) D'après la loi des probabilités totales, A et B étant des événements complémentaires :

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D) \quad \begin{aligned}&\Leftrightarrow 0{,}05=0{,}6\times0{,}046+P(B\cap D)\\&\Leftrightarrow 0{,}05=0{,}0276+P(B\cap D)\\&\Leftrightarrow 0{,}05-0{,}0276=P(B\cap D)\\&\Leftrightarrow P(B\cap D)=0{,}0224\end{aligned}$$

3) $P_B(D)=P\dfrac{(B\cap D)}{P(B)}=\dfrac{0{,}0224}{1-P(A)}=\dfrac{0{,}0224}{1-0{,}6}=\dfrac{0{,}0224}{0{,}4}=0{,}056$.
5,6% des des pipettes venant de l'entreprise B présentent donc un défaut.

Partie C

1) $P(98 \leq X \leq 102) = P((X \leq 102) \setminus (X < 98)) = P(X \leq 102) - P(X < 98)$.
X étant une variable aléatoire continue,
$P(98 \leq X \leq 102) = P(X \leq 102) - P(X \leq 98) \approx 0{,}97494 - 0{,}02506 \approx 0{,}94994 \approx 0{,}9499$

2)a) L'expérience s'apparente donc à n tirages avec remise.
Le nombre de pipettes défectueuses Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et p=0,05.

2)b) Comme $n \geq 100$, alors $n \geq 30$.
$np = 0{,}05n$ et comme $n \geq 100$, $np \geq 0{,}05 \times 100$ soit $np \geq 5$.
Enfin, $n(1-p) = n(1-0{,}05) = 0{,}95n$ et comme $n \geq 100$, $n(1-p) \geq 0{,}95 \times 100$ soit $n(1-p) \geq 95$, ce qui donne par extension $n(1-p) \geq 5$.

2)c) Dans les conditions précédentes, on obtient l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}05 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05 \times (1-0{,}05)}{n}}\,;\, 0{,}05 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05 \times (1-0{,}05)}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}05 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05 \times 0{,}95}{n}}\,;\, 0{,}05 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05 \times 0{,}95}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}05 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}0475}{n}}\,;\, 0{,}05 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}0475}{n}}\right]$$

Exercice 3 :

Partie A

1) f est définie sur $]0,+\infty[$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$

Donc, par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) $f'(x)=(x\ln(x))'=x'\ln(x)+x(\ln(x))'=1\ln(x)+x\dfrac{1}{x}=\ln(x)+\dfrac{x}{x}=\ln(x)+1$

3) Recherchons le signe de f' :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)}=e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}$

$f'(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \ln(x)+1\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)\geq -1$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)}\geq e^{-1}$ car exponentielle est une fonction croissante

$\Leftrightarrow x\geq e^{-1}$

$f(e^{-1})=e^{-1}\ln(e^{-1})=e^{-1}\times -1=-e^{-1}$

D'où le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		-	0	+	
f	0		$-e^{-1}$		$+\infty$

Partie B

1)a) On sait que l'algorithme est destiné à estimer l'intégrale par la méthode des rectangles.

En partant de U=V=0, à chaque itération U est incrémenté de $\dfrac{1}{n}f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ et V est incrémenté de $\dfrac{1}{n}f\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$

Or, comme $e^{-1}\leq 1$, f est strictement croissante sur [1;2].

$f\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et donc $\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$.
Ce qui implique à tout moment dans l'algorithme l'invariant $U\leq V$.

U représente l'approximation de l'intégrale par les rectangles inférieurs, soit l'aire des rectangles hachurés deux fois.
V représente l'approximation de l'intégrale par les rectangles supérieurs, soit l'aire de tous les rectangles hachurés.

1)b) *Voir programmes selon la calculatrice :*
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?t=14044

La justification n'est pas à donner. La voici juste pour donner un moyen de s'en sortir sans programme, ce dernier n'étant pas simple ici :

$$U=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad V=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

Pour n=4 :

$$\begin{aligned}U &=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=4-1} f\left(1+\frac{k}{4}\right) \quad =\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} f\left(1+\frac{k}{4}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(f\left(1+\frac{0}{4}\right)+f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)\right) \quad \approx 0{,}4666 \quad \textit{selon la calculatrice.}\end{aligned}$$

Cette dernière formule pouvait ici être obtenue directement à partir de la représentation de la méthode des rectangles gentiment fournie sur le graphe.

De même :

$$\begin{aligned}V &=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=4-1} f\left(1+\frac{k+1}{4}\right) \quad =\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} f\left(1+\frac{k+1}{4}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(f\left(1+\frac{0+1}{4}\right)+f\left(1+\frac{1+1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2+1}{4}\right)+f\left(1+\frac{3+1}{4}\right)\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(2)\right) \quad \approx 0{,}8132 \quad \textit{selon la calculatrice.}\end{aligned}$$

Cette dernière formule pouvait ici être obtenue directement à partir de la représentation de la méthode des rectangles gentiment fournie sur le graphe.

1)c) $f(1)=1\ln 1=1\times 0=0$
Or, f est strictement croissante sur [1;2] d'après 1)a).
Donc, pour tout $x\in[1;2]$, $x\geq 1$ et donc $f(x)\geq f(1)$ soit $f(x)\geq 0$.

Dans ces conditions, $A=\int_1^2 f(x)\,dx$.

L'encadrement de l'intégrale par la méthode des rectangles est donc aussi un encadrement de l'aire.
$0{,}4666 \leq A \leq 0{,}8132$

2)a) $V_n - U_n =$

$$\frac{1}{n}\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f(2)\right)-\frac{1}{n}\left(f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f(2)-f(1)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1+\frac{2}{n}\right)-\ldots-f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}(f(2)-f(1))=\frac{1}{n}(2\ln(2)-1\ln(1))=\frac{1}{n}(2\ln(2)-1\times 0)=\frac{1}{n}(2\ln(2)-0)=\frac{1}{n}(2\ln(2))=\frac{2\ln(2)}{n}$$

Donc :

$$V_n-U_n<0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{n}<0{,}1 \Leftrightarrow 2\ln 2<0{,}1\,n \quad \text{car} \quad n\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\,ln2}{0{,}1}<n \Leftrightarrow n>\frac{2\,ln2}{0{,}1}$$

Or, $\frac{2\,ln2}{0{,}1}\approx 13{,}9$ d'après la calculatrice.

Donc $n \geq 14$.

Le plus petit entier n vérifiant la propriété est donc 14.

2)b) *Voici une modification possible de l'algorithme. Les commentaires en colonnes de droite ne sont pas exigés et sont donnés à des simples fins de compréhension.*

Variables k et n sont des entiers naturels U, V sont des nombres réels	
Initialisation U prend la valeur 0 V prend la valeur 1 n prend la valeur 0	*Plus rien n'étant connu sur n, on l'initialise à 0.* *L'initialisation de V à 1 est une astuce pour garantir que l'on passe au moins une fois dans la boucle tant que suivante (car V-U=1-0=1≥0,1).*
Traitement Tant que V-U≥0,1 U prend la valeur 0 V prend la valeur 0	*La boucle 'pour' permettant de calculer l'encadrement, pour rechercher un encadrement avec V-U<0,1,*

n prend la valeur n+1
Pour k allant de 0 à n-1
Affecter à U la valeur $U+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Fin tant que

Affichage
Afficher U
Afficher V

nous allons la répéter tant que cette condition n'est pas satisfaite (V-U≥0,1). A chaque itération de cette boucle tant que, on incrémente donc n et réinitialise les variables U et V pour pouvoir faire le calcul.

Remarque : ce n'est pas demandé mais le programme se termine sur calculatrice pour n=14 en fournissant $0{,}5870\leq A\leq 0{,}6861$.

Partie C

1) Pour tout $x\in]0;+\infty[$

$$F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\ln(x)\right)'-\left(\frac{x^2}{4}\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(x)+\frac{x^2}{2}(\ln(x))'-\left(\frac{x^2}{4}\right)'$$
$$=\frac{(x^2)'}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{(x^2)'}{4}=\frac{2x}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2x}-\frac{2x}{4}=x\ln(x)+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}$$
$$=x\ln(x)=f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2) Comme pour tout $x\in[1;2]$, $f(x)\geq 0$ d'après 1)c),

$$A=\int_1^2 f(x)\,dx=F(2)-F(1)=\frac{2^2}{2}\ln 2-\frac{2^2}{4}-\left(\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1^2}{4}\right)$$
$$=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{4}{4}-\left(\frac{1}{2}\times 0-\frac{1}{4}\right)=2\ln 2-1-\left(0-\frac{1}{4}\right)=2\ln 2-1-\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

Remarque : la valeur approchée de 0,6363 confirme bien l'encadrement obtenu en B)1)b), mais aussi celui objet de la question B)2)b) si il a été fait, ce qui n'était pas demandé.

Exercice 4

Commençons par déterminer quelques coordonnées qui vont nous servir.

Par définition du repère : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $Q\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

P étant le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}2\times 1=2\\2\times 0=0\\2\times 0=0\end{pmatrix}$ et donc $B\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

On obtient alors par propriétés du parallélépipède rectangle dans ce repère : $F\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

J étant le milieu de [EF], on a $J\begin{pmatrix}\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{0+2}{2}=\frac{2}{2}=1\\\frac{y_E+y_F}{2}=\frac{0+0}{2}=\frac{0}{2}=0\\\frac{z_E+z_F}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}3\times(x_Q-x_A)=3\times(0-0)=3\times 0=0\\3\times(y_Q-y_A)=3\times(1-0)=3\times 1=3\\3\times(z_Q-z_A)3\times(0-0)=3\times 0=0\end{pmatrix}$ et ainsi $D\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

On obtient alors par propriétés du parallélépipède rectangle encore : $C\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ $H\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

I étant le milieu de [CD], on a $I\begin{pmatrix}\frac{x_C+x_D}{2}=\frac{2+0}{2}=\frac{2}{2}=1\\\frac{y_C+y_D}{2}=\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=3\\\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{0+0}{2}=\frac{0}{2}=0\end{pmatrix}$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Les trois poins A, B, I appartiennent à un unique plan d'équation z=0.
Or, $z_J=1\neq 0$. Donc J n'appartient pas à ce même plan et les points A, B, I, et J ne sont pas coplanaires.

2) Par définition est un vecteur normal au plan (P_1) médiateur de [AB].
(P_1) admet donc pour équation $2x+0y+0z+d=0$ où de est un réel, soit $2x+d=0$.
De plus, P est le milieu de [AB] implique $P\in(P_1)$.
Les coordonnées de P vérifie donc l'équation du plan : $2x_D+d=0$.

Donc $d=-2x_P \Leftarrow=-2\times 1=-2$

(P_1) admet donc pour équation $2x-2=0 \Leftrightarrow x-1=0$

3) Notons $\vec{n_2}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (P_2) .

$\vec{IJ}\begin{pmatrix}x_J-x_I=1-1=0\\y_J-y_I=0-3=-3\\z_J-z_I=1-0=1\end{pmatrix}$

Donc $\vec{IJ}=-\vec{n_2}$

$\vec{IJ}$ et $\vec{n_2}$ sont donc colinéaires, et $\vec{IJ}$ est donc aussi un vecteur normal au plan (P_2).

Notons K le milieu de [IJ] et déterminons-en les coordonnées : $K\begin{pmatrix}\frac{x_I+x_J}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1\\\frac{y_I+y_J}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}\\\frac{z_I+z_J}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$3y_K-z_K-4=3\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-4=\frac{8}{2}-4=4-4=0$

Les coordonnées de K vérifie donc l'équation du plan (P_2) et donc $K\in(P_2)$.

(P_2) est donc bien le plan médiateur du segment [IJ].

4)a) Les plans (P_1) et (P_2) ayant des vecteurs normaux respectifs $\vec{IJ}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ non colinéaires, ils sont forcément sécants.

4)b) L'intersection de (P_1) et (P_2) est une droite admettant des vecteurs directeurs orthogonaux à ces deux vecteurs.

Notons $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (Δ).

$\vec{d}\cdot\vec{IJ}=0\times 0+1\times -3+3\times 1=0-3+3=0$

$\vec{d}\cdot\vec{n_2}=0\times 0+1\times 3+3\times -1=0+3-3=0$

$\vec{d}$ est donc bien orthogonal aux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{n_2}$, normaux respectivement aux plans (P_1) et (P_2).

Notons $M\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$ un point de la droite (Δ).

$x_M-1=0$

Les coordonnées de M vérifient donc l'équation du plan (P_1) et donc $M \in (P_1)$.

$3y_M - z_M - 4 = 3\times 0 - (-4) - 4 = 4 - 4 = 0$

Les coordonnées de M vérifient donc l'équation du plan (P_2) et donc $M \in (P_2)$.

La droite (Δ) est donc parallèle à la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2), et passe par un point appartenant à cette intersection.
La droite (Δ) est donc l'intersection des plans (P_1) et (P_2).

4)c) Comme $\Omega \in (\Delta)$, posons $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ t_\Omega \\ 3t_\Omega - 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\Omega A = \Omega I \quad & \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2 + (z_\Omega - z_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_I)^2 + (y_\Omega - y_I)^2 + (z_\Omega - z_I)^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(1 - x_A)^2 + (t_\Omega - y_A)^2 + (3t_\Omega - 4 - z_A)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (t_\Omega - 0)^2 + (3t_\Omega - 4 - 0)^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (t_\Omega - 0)^2 + (3t_\Omega - 4 - 0)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (t_\Omega - 3)^2 + (3t_\Omega - 4 - 0)^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + t_\Omega^2 + (3t_\Omega - 4)^2} = \sqrt{0^2 + t_\Omega^2 - 2\times 3t_\Omega + 3^2 + (3t_\Omega - 4)^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 + t_\Omega^2 + (3t_\Omega)^2 - 2\times 3t_\Omega \times 4 + 4^2} = \sqrt{0 + t_\Omega^2 - 6t_\Omega + 9 + (3t_\Omega)^2 - 2\times 3t_\Omega \times 4 + 4^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 + t_\Omega^2 + 3^2 t_\Omega^2 - 24t_\Omega + 16} = \sqrt{t_\Omega^2 - 6t_\Omega + 9 + 3^2 t_\Omega^2 - 24t_\Omega + 16} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{t_\Omega^2 + 9t_\Omega^2 - 24t_\Omega + 17} = \sqrt{t_\Omega^2 + 9t_\Omega^2 - 30t_\Omega + 25} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{10t_\Omega^2 - 24t_\Omega + 17} = \sqrt{10t_\Omega^2 - 30t_\Omega + 25}
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$10t_\Omega^2 - 24t_\Omega + 17 = 10t_\Omega^2 - 30t_\Omega + 25 \quad \begin{aligned} & \Leftrightarrow -24t_\Omega + 30t_\Omega = 25 - 17 \\ & \Leftrightarrow 6t_\Omega = 8 \\ & \Leftrightarrow t_\Omega = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Donc $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ t_\Omega = \frac{4}{3} \\ 3t_\Omega - 4 = 3\frac{4}{3} - 4 = 4 - 4 = 0 \end{pmatrix}$

4)d) On sait donc que $\Omega A = \Omega I$.
De plus, comme $\Omega \in (\Delta)$ et que $\Omega \in (P_1)$, plan médiateur de [AB], $\Omega A = \Omega B$.
De plus, comme $\Omega \in (\Delta)$ et que $\Omega \in (P_2)$, plan médiateur de [IJ], $\Omega I = \Omega J$.
Donc $\Omega A = \Omega B = \Omega I = \Omega J$.
Ω est bien le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.