

3.3. Équation avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

Pour ce type d'équation, nous admettons le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'énonce ainsi :

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E) admet une **unique** solution y sur I satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1.$$

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre (avec ou sans conditions initiales), on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition :

Proposition 4.

Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène (E_0) à une solution particulière de (E).

Il reste donc à déterminer une solution particulière.

3.4. Recherche d'une solution particulière

On donne deux cas particuliers importants et une méthode générale.

Second membre du type $e^{\alpha x} P(x)$.

Si $g(x) = e^{\alpha x} P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = e^{\alpha x} x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_0(x) = e^{\alpha x} Q(x)$ ($m = 0$), si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = x e^{\alpha x} Q(x)$ ($m = 1$), si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = x^2 e^{\alpha x} Q(x)$ ($m = 2$), si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Second membre du type $e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$.

Si $g(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_0(x) = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_0(x) = x e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Exemple 13.

Résoudre les équations différentielles :

$$(E_0) \quad y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_1) \quad y'' - 5y' + 6y = 4xe^x \quad (E_2) \quad y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. **Équation (E_0).** L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$, avec deux racines distinctes $r_1 = 2, r_2 = 3$. Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. **Équation (E_1).**

(a) On cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $y_0(x) = (ax + b)e^x$. Lorsque l'on injecte y_0 dans l'équation (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned} & (ax + 2a + b)e^x - 5(ax + a + b)e^x + 6(ax + b)e^x = 4xe^x \\ \iff & (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a + b) + 6b = 4x \\ \iff & 2a = 4 \quad \text{et} \quad -3a + 2b = 0 \\ \iff & a = 2 \quad \text{et} \quad b = 3 \end{aligned}$$

Donc $y_0(x) = (2x + 3)e^x$.

(b) L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{(2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(c) On a $y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. On cherche λ, μ tels que $y(0) = 1, y'(0) = 0$. C'est-à-dire que $3 + \lambda + \mu = 1$, $5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. Donc $\lambda = -1, \mu = -1$, c'est-à-dire que $y(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.

3. **Équation (E_2) .** Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = x(ax+b)e^{2x}$. On obtient $y_0(x) = x(-2x-4)e^{2x}$.

Méthode de variation des constantes.

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_0) , on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions vérifiant :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Pourquoi cela ? Si $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$ est une telle fonction, alors :

$$y_0' = \lambda' y_1 + \mu' y_2 + \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2'$$

$$y_0'' = \lambda' y_1' + \mu' y_2' + \lambda y_1'' + \mu y_2'' = \frac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2''$$

Ainsi l'équation (E) est vérifiée par y_0 :

$$\begin{aligned} a y_0'' + b y_0' + c y_0 &= a \left(\frac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2'' \right) + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= g(x) + \lambda(a y_1'' + b y_1' + c y_1) + \mu(a y_2'' + b y_2' + c y_2) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène. Le système (S) se résout facilement, ce qui donne λ' et μ' , puis λ et μ par intégration.

Exemple 14.

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

où cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient (S) :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \frac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x &= 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x &= \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu' (\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' (\cos x)^2 &= 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1.$$

Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.

On vérifie pour se rassurer que $y_0(x) = \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$ est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :

$$\lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Mini-exercices.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. Tracer la courbe intégrale. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$. Trouver la solution vérifiant $y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 0$. Tracer la courbe intégrale. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = e^x$.
3. Résoudre l'équation différentielle $2y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = 0$. Trouver la solution ayant une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$. Résoudre $2y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = x - 1$.

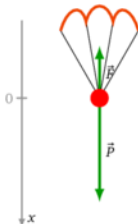
4. Problèmes conduisant à des équations différentielles

4.1. Parachutiste

Revenons sur l'exemple du parachutiste de l'introduction : sa vitesse verticale vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - f v(t)$$

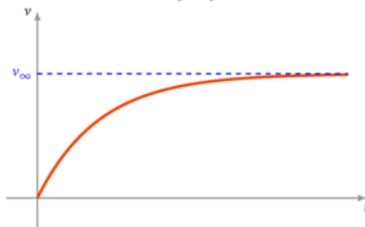
où g (la constante de gravitation) et f (le coefficient de frottement) sont des constantes.



Nous avons tous les ingrédients pour trouver v .

- **Équation homogène.** Les solutions de l'équation homogène $v'(t) = -f v(t)$ sont les $v(t) = k e^{-f t}$, $k \in \mathbb{R}$.
- **Solution particulière.** On cherche une solution particulière $v_p(t) = k(t) e^{-f t}$ de l'équation $v' = g - f v$ par la méthode de variation de la constante : $v_p'(t) = k'(t) e^{-f t} - f k(t) e^{-f t}$. Pour que v_p soit solution de l'équation différentielle il faut et il suffit donc que $k'(t) e^{-f t} = g$. Ainsi $k'(t) = g e^{f t}$ donc, par exemple, $k(t) = \frac{g}{f} e^{f t}$. Ainsi $v_p(t) = \frac{g}{f}$.
- **Solutions générales.** La solution générale de l'équation est donc $v(t) = \frac{g}{f} + k e^{-f t}$, $k \in \mathbb{R}$.
- **Condition initiale.** Si à l'instant $t = 0$ le parachute se lance avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire $v(0) = 0$, alors sa vitesse est :

$$v(t) = \frac{g}{f} - \frac{g}{f} e^{-f t}.$$



- **Vitesse limite.** Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $v(t) \rightarrow v_\infty = \frac{g}{f}$, qui représente la vitesse limite que le parachutiste ne peut dépasser. Expérimentalement, on mesure que v_∞ vaut environ 5 m/s (soit environ 20 km/h), et comme $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, cela permet de calculer le coefficient de frottement f .
- **Position.** Comme $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, trouver la position x revient à trouver une primitive de v :

$$x(t) = \frac{g}{f} t + \frac{g}{f^2} (e^{-f t} - 1)$$

en prenant comme convention $x(0) = 0$.

Ceci n'est bien sûr qu'un **modèle** qui ne correspond pas parfaitement à la réalité, mais permet cependant de mettre en évidence des propriétés vérifiées par les conditions expérimentales, comme la vitesse limite par exemple.

4.2. Demi-vie

Dans un tissu radioactif, la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ présents dans le tissu à l'instant t . Il existe donc une constante λ strictement positive telle que :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Le signe « - » de cette équation différentielle traduit la décroissance du nombre de noyaux. Si N_0 désigne le nombre de noyaux à l'instant initial, on a donc :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Dans ce contexte apparaissent souvent deux grandeurs qu'il est bon de savoir interpréter graphiquement :

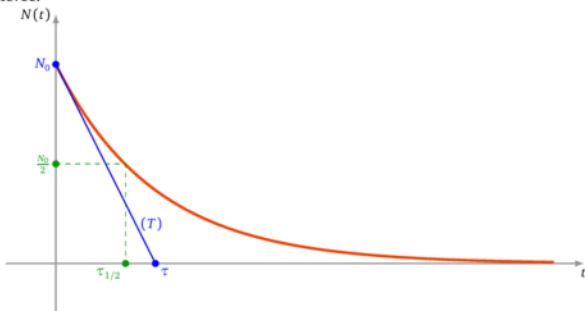
- Le **temps caractéristique**, noté τ , est défini par :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Si (T) désigne la tangente à l'origine de la courbe (C) de la fonction N , le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des temps. En effet, une équation de (T) est :

$$y = N'(0)t + N(0) = -\lambda N_0 t + N_0$$

On constate que si $t = \tau$, on a bien $y = 0$. Plus le temps caractéristique est petit, plus la vitesse de désintégration initiale est élevée.



- La **période de demi-vie**, notée $\tau_{1/2}$, est la période au bout de laquelle la moitié des noyaux se sont désintégrés. On a donc :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Donc $N_0 e^{-\lambda \tau_{1/2}} = \frac{N_0}{2}$, d'où $\lambda \tau_{1/2} = \ln 2$. Ainsi :

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

On peut aussi exprimer $N(t)$ en fonction de la période de demi-vie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} t} = N_0 2^{-\frac{t}{\tau_{1/2}}}$$

Notez que $\tau_{1/2}$ ne dépend pas de N_0 , et c'est bien le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux se soient désintégrés, ce quel que soit l'instant initial :

$$N(t + \tau_{1/2}) = N_0 2^{-\frac{t + \tau_{1/2}}{\tau_{1/2}}} = N_0 2^{-\frac{t}{\tau_{1/2}} - 1} = \frac{1}{2} N_0 2^{-\frac{t}{\tau_{1/2}}} = \frac{N(t)}{2}$$

4.3. Modèles d'évolution

On considère une culture de bactéries en milieu clos. Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans la culture à l'instant $t = 0$.

Loi de Malthus.

Un premier modèle est de supposer que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence. Cela signifie que le nombre $N(t)$ de bactéries vérifie l'équation différentielle

$$y' = ay,$$

où $a > 0$ est une constante dépendant des conditions expérimentales. Nous savons résoudre cette équation ! Ainsi selon ce modèle

$$N(t) = N_0 e^{at}.$$

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Ce modèle ne peut donc s'appliquer sur une longue période.

Modèle de Verhulst.

Pour tenir compte de ces observations, on présente un autre modèle d'évolution. On suppose que le nombre $N(t)$ de bactéries vérifie l'équation différentielle

$$y' = ay(M - y), \quad (E)$$

où $a > 0$ et $M > 0$ sont des constantes.

On cherche les solutions y de (E) telles que $y(t) > 0$ pour $t \in I = [0, +\infty[$. Supposons qu'une telle solution y existe.

• Changement de fonction.

On transforme l'équation (E) en une équation plus facile à résoudre. Pour cela on pose $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. La fonction z est dérivable sur I et :

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{ay(y-M)}{y^2} = a - \frac{aM}{y} = a - aMz$$

• Solutions z .

Ainsi la fonction z doit vérifier l'équation différentielle

$$z' = a - aMz,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant. On en déduit que, pour tout $x \in I$,

$$z(x) = ke^{-aMx} + \frac{1}{M}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

• Solutions y .

Cela permet d'obtenir y :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ke^{-aMx} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{kMe^{-aMx} + 1}$$

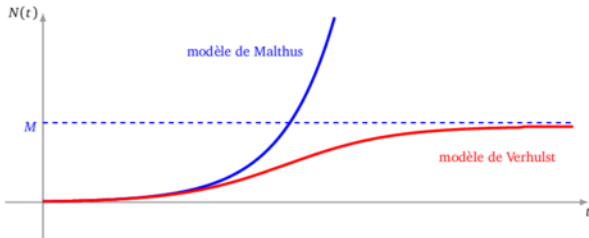
La constante k est déterminée par la condition initiale $y(0) = \frac{M}{kM+1} = N_0$, ainsi $k = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{M}$.

• **Exemple.** On suppose $N_0 = 0,01$ (en million de bactéries) et $M = 1$, $a = 1$. Alors $k = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{M} = 99$. Ainsi selon ce modèle :

$$N(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-t}}$$

Il est clair que $0 < N(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$, et $N(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Pour connaître les variations de la fonction N , nul besoin de calculs car on sait déjà que N est solution de l'équation différentielle (E), donc $N'(t) = N(t)(1 - N(t))$. Ainsi $N'(t) > 0$, donc la fonction N est croissante.

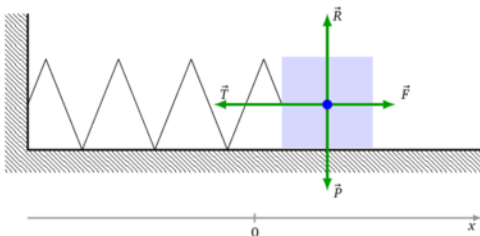


Le modèle de Verhulst a l'avantage de bien faire apparaître un comportement asymptotique particulier : le nombre de bactéries finit par se stabiliser.

4.4. Masse attachée à un ressort

Une masse est attachée à un ressort. Quelles sont les forces qui s'appliquent à cette masse ?

- Un poids \vec{P} ,
- une réaction $\vec{R} = -\vec{P}$ qui s'oppose au poids,
- une force de rappel \vec{T} ,
- une force de frottement \vec{F} .



Principe fondamental de la mécanique

Le principe fondamental de la mécanique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Il est à noter que la réaction s'opposant au poids, on a $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et l'équation devient :

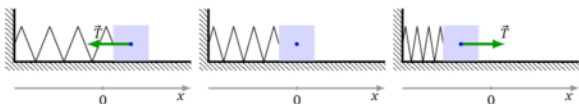
$$\vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Force de rappel

La force de rappel est une force horizontale. Elle est nulle à la position d'équilibre, qui sera pour nous l'origine $x = 0$. Si on écarte davantage la masse du mur, la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe vers la position d'équilibre (vers la gauche sur le dessin). Si on rapproche la masse du mur, le ressort se comprime, et la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe encore vers la position d'équilibre (cette fois vers la droite sur le dessin). On modélise la force de rappel par

$$\vec{T} = -kx\vec{i}$$

où x est la position de la masse (on peut avoir $x \geq 0$ ou $x \leq 0$), et $k > 0$ est une constante qui dépend du ressort.



Oscillations sans frottements

Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de frottement : $\vec{F} = \vec{0}$.

Le principe fondamental de la mécanique, considéré uniquement sur l'axe horizontal, s'écrit alors :

$$-kx(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, dont les solutions sont les nombres complexes $r_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $r_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Nous sommes dans le cas $\Delta = -4\frac{k}{m} < 0$. Les solutions de cette équation caractéristique sont de la forme $\alpha \pm i\beta$ avec

$\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ce qui fait que les solutions de l'équation différentielle sont les :

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

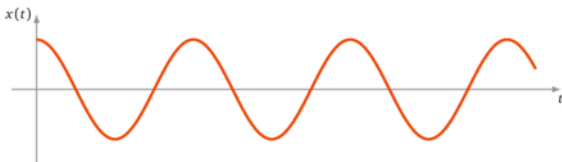
Dans notre situation (la fonction inconnue est x et la variable t) :

$$x(t) = \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemple 15.

On lâche la masse au point d'abscisse 1, sans vitesse initiale. Cela nous donne les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$. Comme $x(0) = 1$ alors $\lambda = 1$. Comme $x'(0) = 0$ alors $\mu = 0$. Ainsi on trouve une solution périodique :

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$



Oscillations avec faibles frottements

On rajoute une force de frottement $\vec{F} = -f m \frac{dx(t)}{dt}$ qui est proportionnelle à la vitesse et s'oppose au déplacement (f est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la mécanique devient :

$$-kx(t) - f m \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + f y' + \frac{k}{m} y = 0$$

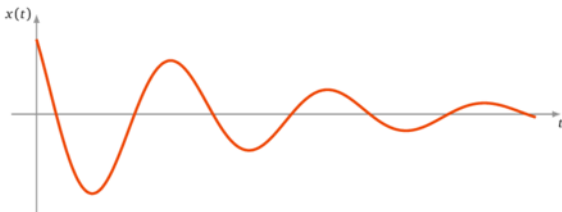
L'équation caractéristique est cette fois $r^2 + f r + \frac{k}{m} = 0$. Son discriminant est $\Delta = f^2 - 4 \frac{k}{m}$. Supposons que le coefficient de frottement f soit faible, c'est-à-dire que $\Delta = f^2 - 4 \frac{k}{m} < 0$, comme dans le cas sans frottement. On note $\delta = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4 \frac{k}{m} - f^2}$. Les deux solutions sont $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = -\frac{f}{2}$ et $\beta = \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4}}$. Les solutions de l'équation différentielle sont encore de la forme :

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

Ce qui donne ici :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta}{2}t\right) \right) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Cette fois la solution n'est plus périodique, mais correspond à un mouvement oscillant amorti, qui tend vers la position d'équilibre $x = 0$.



Mini-exercices.

1. Un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R . Calculer l'évolution de la charge électrique qui vérifie $q(t) = -RC \frac{dq(t)}{dt}$.
2. Calculer et tracer les solutions du système masse-ressort pour différents niveaux de frottements.

3. Un tasse de café de température $T_0 = 100^\circ\text{C}$ est posée dans une pièce de température $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température $\frac{dT(t)}{dt}$ est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞ . Sachant qu'au bout de 3 min la température du café est passée à 80°C , combien de temps faudra-t-il pour avoir un café à 65°C ?