

Équations différentielles

Vidéo ■ partie 1. Définition

Vidéo ■ partie 2. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Vidéo ■ partie 3. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

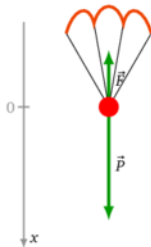
Vidéo ■ partie 4. Problèmes conduisant à des équations différentielles

Fiche d'exercices ♦ Équations différentielles

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids \vec{P} . Par le principe fondamental de la mécanique : $\vec{P} = m\vec{a}$. Tous les vecteurs sont verticaux donc $mg = ma$, où g est la constante de gravitation, a l'accélération verticale et m la masse. On obtient $a = g$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g \quad (1)$$

Il est facile d'en déduire la vitesse par intégration : $v(t) = gt$ (en supposant que la vitesse initiale est nulle), c'est-à-dire que la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, donc par une nouvelle intégration on obtient $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (en supposant que la position initiale est nulle).



Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -f v$ (f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient $mg - f v = ma$, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - f v(t) \quad (2)$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une *équation différentielle*. Il n'est pas évident de trouver laquelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui nous permettra d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

1. Définition

1.1. Introduction

Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ;
- dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y' , ou dérivées d'ordres supérieurs $y'', y^{(3)}, \dots$).

Voici des équations différentielles faciles à résoudre.

Exemple 1.

De tête, trouver au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = \sin x & \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x = (x)' \\ y' = 1 + e^x & \mathbb{R} \ni x \mapsto 1 + e^x = (x)' \\ y' = y & \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x = (x)' \\ y' = 3y & \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{3x} = (x)' \\ y'' = \cos x & \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x = (x)'' \\ y'' = y & \mathbb{R} \ni x \mapsto \cosh x = (x)'' \end{array}$$

Il est aussi facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien solution d'une équation.

Exemple 2.

- Soit l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$. Vérifier que $y(x) = k \exp(x^2) - 2$ est une solution sur \mathbb{R} , ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
- Soit l'équation différentielle $x^2 y'' - 2y + 2x = 0$. Vérifier que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur \mathbb{R} , pour tout $k \in \mathbb{R}$.

1.2. Définition

Passons à la définition complète d'une équation différentielle et surtout d'une solution d'une équation différentielle.

Définition 1.

- Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (E)$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

- Une **solution** d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarque.

- C'est la coutume pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$, y' au lieu de $y'(x)$,... On note donc « $y' = \sin x$ » ce qui signifie « $y'(x) = \sin x$ ».
- Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t . On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie $(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (\sin t)(x(t))^4 = e^t$.
- Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. C'est pourquoi on trouve souvent « intégrer l'équation différentielle » pour « trouver les solutions de l'équation différentielle ».
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = 1/x$ a pour solutions les fonctions $y(x) = \ln(x) + k$. Alors que sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = \ln(-x) + k$ (k est une constante).
- Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I , on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

Exemple 3 (Équation à variables séparées).

Une équation différentielle **à variables séparées** est une équation du type :

$$y' = g(x)/f(y) \quad \text{ou} \quad y' f(y) = g(x)$$

Une telle équation se résout par calcul de primitives. Si $G(x)$ est une primitive de $g(x)$ alors $G'(x) = g(x)$. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $F'(x) = f(x)$, mais surtout, par dérivation d'une composition, $(F(y(x)))' = y'(x)F'(y(x)) = y'f(y)$. Ainsi l'équation différentielle $y'f(y) = g(x)$ se réécrit $(F(y(x)))' = G'(x)$ ce qui équivaut à une égalité de fonctions : $F(y(x)) = G(x) + c$.

Voici un exemple concret :

$$x^2 y' = e^{-y}$$

On commence par séparer les variables x d'un côté et y de l'autre : $y' e^y = \frac{1}{x^2}$ (en supposant $x \neq 0$). On intègre des deux côtés :

$$e^y = -\frac{1}{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Ce qui permet d'obtenir y (en supposant $-\frac{1}{x} + c > 0$) :

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

qui est une solution sur chaque intervalle I où elle est définie et dérivable. Cet intervalle dépend de la constante c : si $c < 0$, $I =]\frac{1}{c}, 0[$; si $c = 0$, $I =]-\infty, 0[$; si $c > 0$, $I =]\frac{1}{c}, +\infty[$.

1.3. Équation différentielle linéaire

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur deux types d'équations : les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.

- Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y, y', y'', \dots

- Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou **sans second membre**, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

- Une équation différentielle linéaire est **à coefficients constants** si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple 4.

- $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
- $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
- $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.
- $y'^2 - y = x$ ou $y'' \cdot y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

Proposition 1 (Principe de linéarité).

Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (E_0)$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x), \quad (E)$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :

- trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E),
- trouver l'ensemble \mathcal{S}_h des solutions y de l'équation homogène associée

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (E_0)$$

ce qui permet de trouver toutes les solutions de (E) :

Proposition 2 (Principe de superposition).

L'ensemble des solutions \mathcal{S} de (E) est formé des

$$y_0 + y \quad \text{avec} \quad y \in \mathcal{S}_h.$$

Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. C'est une conséquence immédiate du caractère linéaire des équations.

Mini-exercices.

1. Chercher une solution « simple » de l'équation différentielle $y' = 2y$. Même question avec $y'' = -y$; $y'' + \cos(2x) = 0$; $xy'' = y'$.
2. Résoudre l'équation différentielle à variables séparées $y'y^2 = x$. Même question avec $y' = y \ln x$; $y' = \frac{1}{y^n}$ ($n \geq 1$).
3. Soit l'équation $y' = y(1 - y)$. Montrer que si y est une solution non nulle de cette équation, alors $z = 2y$ n'est pas solution. Que peut-on en conclure ?

2. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 2.

Une équation différentielle **linéaire du premier ordre** est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Dans la suite on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I . On peut envisager la forme : $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$. On demandera alors que $\alpha(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. La division par α permet de retrouver la forme (E).

On va commencer par résoudre le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction (et toujours $b = 0$). On terminera par le cas général où a et b sont deux fonctions.

2.1. $y' = ay$

Théorème 1.

Soit a un réel. Soit l'équation différentielle :

$$y' = ay \quad (E)$$

Les solutions de (E), sur \mathbb{R} , sont les fonctions y définies par :

$y(x) = ke^{ax}$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Ce résultat est fondamental. Il est tout aussi fondamental de comprendre d'où vient cette formule, via une preuve rapide (mais pas tout à fait rigoureuse). On réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{y'}{y} = a$$

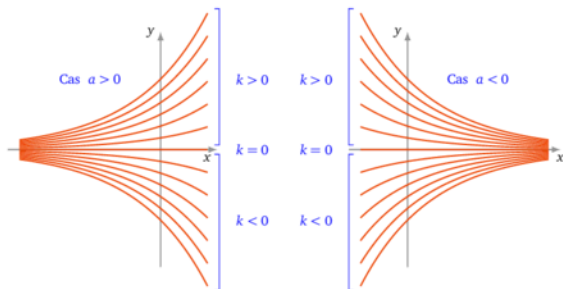
que l'on intègre à gauche et à droite pour trouver :

$$\ln |y(x)| = ax + b$$

On compose par l'exponentielle des deux côtés pour obtenir :

$$|y(x)| = e^{ax+b}$$

Autrement dit $y(x) = \pm e^b e^{ax}$. En posant $k = \pm e^b$ on obtient les solutions (non nulles) cherchées. Nous verrons une preuve rigoureuse juste après.

**Exemple 5.**

Résoudre l'équation différentielle :

$$3y' - 5y = 0$$

On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{5}{3}y$. Ses solutions, sur \mathbb{R} , sont donc de la forme : $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque.

- L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).
- La constante k peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la « solution nulle » : $y = 0$ sur \mathbb{R} , qui est une solution évidente de l'équation différentielle.
- Le théorème 1 peut aussi s'interpréter ainsi : si y_0 est une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle (E), alors toutes les autres solutions y sont des multiples de y_0 . En termes plus savants, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle).

Preuve du théorème 1.

1. On vérifie que les fonctions proposées sont bien solutions de (E). En effet, pour $y(x) = ke^{ax}$, on a

$$y'(x) = ake^{ax} = ay(x).$$

2. Montrons que les fonctions proposées sont les seules solutions. (C'est-à-dire qu'il n'y en a pas d'un autre type que $y(x) = ke^{ax}$.) Soit y une solution quelconque de (E) sur \mathbb{R} . Considérons la fonction z définie par : $z(x) = y(x)e^{-ax}$. Alors, par la formule de dérivation d'un produit :

$$z'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

Mais, par hypothèse, y est une solution de (E), donc $y'(x) - ay(x) = 0$. On en déduit que $z'(x) = 0$, pour tout réel x . Ainsi z est une fonction constante sur \mathbb{R} . Autrement dit, il existe une constante k telle que $z(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où :

$$z(x) = k \quad \text{donc} \quad y(x)e^{-ax} = k \quad \text{donc} \quad y(x) = ke^{ax}.$$

Ce qui termine la preuve du théorème. □

2.2. $y' = a(x)y$

Le théorème suivant affirme que, lorsque a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 2.

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a . Soit l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y \tag{E}$$

Les solutions sur I de (E) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on retrouve les solutions du théorème 1.

Une preuve rapide du théorème 2 est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = a(x) &\iff \ln |y(x)| = A(x) + b \iff |y(x)| = e^{A(x)+b} \\ &\iff y(x) = \pm e^b e^{A(x)} \iff y(x) = k e^{A(x)} \quad \text{avec } k = \pm e^b \end{aligned}$$

Une preuve rigoureuse (puisque l'on évite de diviser par quelque chose qui pourrait être nul) :

Démonstration.

$$\begin{aligned} &y(x) \text{ solution de (E)} \\ &\iff y'(x) - a(x)y(x) = 0 \\ &\iff e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = 0 \\ &\iff (y(x)e^{-A(x)})' = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad y(x)e^{-A(x)} = k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad y(x) = k e^{A(x)} \end{aligned}$$

Exemple 6.

Comment résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = y$? On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2} y$. Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi les solutions cherchées sont $y(x) = k e^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2.3. $y' = a(x)y + b(x)$

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre :

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

L'équation homogène associée est :

$$y' = a(x)y \quad (E_0)$$

Il n'y a pas de nouvelle formule à apprendre pour ce cas. Il suffit d'appliquer le principe de superposition : les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (E₀). Ce qui donne :

Proposition 3.

Si y_0 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_0(x) + k e^{A(x)} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$.

La recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$ a pour solution particulière $y_0(x) = -2$; donc l'ensemble des solutions de cette équation sont les $y(x) = -2 + k e^{x^2}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

Le nom de cette méthode est paradoxal mais justifié ! C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive.

La solution générale de (E₀) $y' = a(x)y$ est donnée par $y(x) = k e^{A(x)}$, avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x) e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_0 soit une solution de (E) $y' = a(x)y + b(x)$.

Puisque $A' = a$, on a :

$$y_0'(x) = a(x)k(x)e^{A(x)} + k'(x)e^{A(x)} = a(x)y_0(x) + k'(x)e^{A(x)}$$

Ainsi :

$$y_0'(x) - a(x)y_0(x) = k'(x)e^{A(x)}$$

Donc y_0 est une solution de (E) si et seulement si

$$k'(x)e^{A(x)} = b(x) \iff k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \iff k(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx.$$

Ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)} dx\right) e^{A(x)}$ de (E) sur I . La solution générale de (E) est donnée par

$$y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7.

Soit l'équation $y' + y = e^x + 1$. L'équation homogène est $y' = -y$ dont les solutions sont les $y(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_0(x) = k(x)e^{-x}$. On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$.

$$\begin{aligned} y_0' + y_0 &= e^x + 1 \\ \iff (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} &= e^x + 1 \\ \iff k'(x)e^{-x} &= e^x + 1 \\ \iff k'(x) &= e^{2x} + e^x \\ \iff k(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + c \end{aligned}$$

On fixe $c = 0$ (n'importe quelle valeur convient) :

$$y_0(x) = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1$$

Nous tenons notre solution particulière ! Les solutions générales de l'équation $y' + y = e^x + 1$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.4. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Voici l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

Soit $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I . Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

D'après nos calculs précédents cette solution est :

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt\right) e^{A(x)} + y_0 e^{A(x)}$$

où A est la primitive de a s'annulant en x_0 , et cette solution vérifie bien $y(x_0) = y_0$.

Exemple 8.

Trouver la solution de $y' + y = e^x + 1$ vérifiant $y(1) = 2$. Nous avons déjà trouvé toutes les solutions de cette équation dans l'exemple 7 : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$. Nous allons déterminer la constante k afin que la condition initiale $y(1) = 2$ soit vérifiée :

$$y(1) = 2 \iff \frac{1}{2}e^1 + 1 + ke^{-1} = 2 \iff \frac{k}{e} = 1 - \frac{e}{2} \iff k = e - \frac{e^2}{2}$$

Ainsi la solution cherchée est $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + \left(e - \frac{e^2}{2}\right)e^{-x}$, et c'est la seule solution.

2.5. Courbes intégrales

Une *courbe intégrale* d'une équation différentielle (E) est le graphe d'une solution de (E). Le théorème 3 pour les équations différentielles linéaires du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$ se reformule ainsi :

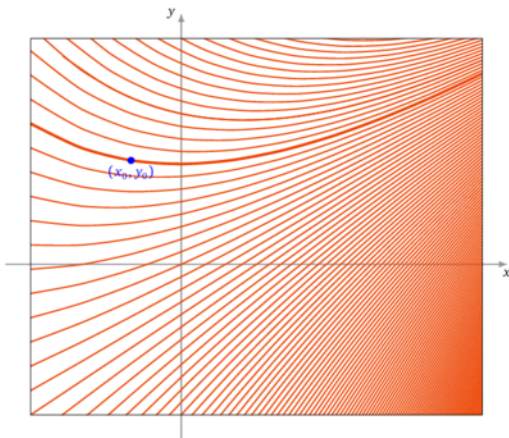
« Par chaque point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une et une seule courbe intégrale. »

Exemple 9.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$ sont les

$$y(x) = x - 1 + ke^{-x} \quad k \in \mathbb{R}$$

et sont définies sur $I = \mathbb{R}$. Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe intégrale passant par (x_0, y_0) .

**2.6. Exemples****Exemple 10.**

On considère l'équation différentielle $(E) : x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
2. Peut-on trouver une solution sur \mathbb{R} ?
3. Trouver la solution sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = 0$.

Correction.

- (a) Résolution de l'équation homogène $(E_0) : x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0$. Pour $x \neq 0$, on a $y' = -\frac{2-3x^2}{x^3}y$. Donc la solution générale de (E_0) est $y(x) = ke^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3} dx} = ke^{3 \ln|x|} e^{1/x^2} = k|x|^3 e^{1/x^2}$. Donc la solution générale de (E_0) sur $]0, +\infty[$ est : $y(x) = k_1 x^3 e^{1/x^2}$; et sur $]-\infty, 0[$: $y(x) = k_2 x^3 e^{1/x^2}$.
 - (b) Résolution de l'équation avec second membre (E) par la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $y(x) = k(x)x^3 e^{1/x^2}$. En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient $k'(x)x^3 e^{1/x^2} = 1$. Donc $k(x) = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx = \frac{1}{2} e^{-1/x^2} + c$. D'où une solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$: $y_0(x) = k(x)x^3 e^{1/x^2} = \frac{1}{2} x^3$.
 - (c) Solution générale sur $]0, +\infty[$: $y(x) = \frac{1}{2} x^3 + k_1 x^3 e^{1/x^2}$.
Solution générale sur $]-\infty, 0[$: $y(x) = \frac{1}{2} x^3 + k_2 x^3 e^{1/x^2}$.
2. $x^3 e^{1/x^2}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \rightarrow 0^+$ (resp. 0^-), donc pour k_1 ou k_2 non nul, y ne peut pas être prolongée par continuité en 0. Pour $k_1 = k_2 = 0$, $y(x) = \frac{1}{2} x^3$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} . C'est la seule solution sur \mathbb{R} .
3. Si l'on cherche une solution particulière vérifiant $y(1) = 0$, alors on a $y(x) = \frac{1}{2} x^3 + kx^3 e^{1/x^2}$, $y(1) = 1/2 + ke = 0$, donc $k = -\frac{1}{2e}$. Donc $y(x) = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2e} x^3 e^{1/x^2}$.

Exemple 11.Résoudre $x(1+x)y' - (x+2)y = 2x$.**1. Équation homogène.**

L'équation homogène est $x(1+x)y' - (x+2)y = 0$. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, l'équation s'écrit $y' = \frac{x+2}{x(1+x)}y$. La décomposition de la fraction en éléments simples est : $a(x) = \frac{x+2}{x(1+x)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{1+x}$. Une primitive de $a(x)$ est donc $A(x) = \int \frac{x+2}{x(1+x)} dx = 2 \ln|x| - \ln|x+1|$. La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = ke^{A(x)} = ke^{2 \ln|x| - \ln|x+1|} = ke^{\ln \frac{x^2}{|x+1|}} = k \frac{x^2}{|x+1|} = \pm k \frac{x^2}{x+1}$. Cette solution est bien définie en $x = 0$. On obtient donc la solution générale de l'équation homogène : $y(x) = k \frac{x^2}{x+1}$ sur $] -\infty, -1[$ ou sur $] -1, +\infty[$.

2. Solution particulière.

On cherche une solution de l'équation non homogène sous la forme $y_0(x) = k(x) \frac{x^2}{x+1}$ par la méthode de variation de la constante. En remplaçant dans l'équation, on obtient $k'(x)x^3 = 2x$. Donc pour $x \neq 0$, on a $k'(x) = \frac{2}{x^2}$, et $k(x) = -\frac{2}{x}$. D'où la solution générale de l'équation non homogène $y(x) = -\frac{2x}{x+1} + k \frac{x^2}{x+1}$. Cette solution est définie sur $] -\infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[$.

3. Existe-t-il une solution définie sur \mathbb{R} ?

On a $y(x) = \frac{x(kx-2)}{x+1}$. Donc pour $k \neq -2$, on ne peut prolonger y en -1 . Pour $k = -2$, on peut prolonger y en -1 . On obtient une solution définie sur \mathbb{R} : $y = -2x$.

Mini-exercices.

- Résoudre l'équation différentielle $y' + y \ln 2 = 0$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(1) = \frac{1}{2}$.
- Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 5$. Trouver la solution vérifiant $y(0) = -\frac{1}{3}$. Tracer la courbe intégrale.
- Trouver une solution évidente, puis résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$. Trouver la solution vérifiant $y(1) = 2$. Tracer la courbe intégrale. Même travail avec l'équation $xy' - y = x^2$.
- Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$. Même travail avec $y' + 2y = \sin(3x)e^{-2x}$.

3. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

3.1. Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I .

L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E) .

La structure des solutions de l'équation est très simple :

Théorème 4.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

Nous admettons ce résultat.

3.2. Équation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ \iff (ar^2 + br + c)e^{rx} &= 0 \\ \iff ar^2 + br + c &= 0. \end{aligned}$$

Définition 3.

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée *l'équation caractéristique* associée à (E_0) .

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0) .

Théorème 5.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 12.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y'' - y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ ($\Delta > 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$ ($\Delta = 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$ ($\Delta < 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^x (\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La preuve consiste à trouver deux solutions linéairement indépendantes, ce qui permet d'affirmer qu'elles forment une base d'après le théorème 4 (que l'on a admis).

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 . On obtient ainsi deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ qui sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$. Comme l'espace des solutions un espace vectoriel de dimension 2 (par le théorème 4), alors une base de l'espace des solutions de (E_0) est $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$.

La solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r_0 . On obtient ainsi une solution $y_1 = e^{r_0 x}$. On vérifie que $y_2 = x e^{r_0 x}$ est aussi une solution : $ay_2'' + by_2' + cy_2 = (2ar_0 + ar_0^2)x e^{r_0 x} + (b + br_0)x e^{r_0 x} + c x e^{r_0 x} = (2ar_0 + b)e^{r_0 x} = 0$ car $2ar_0 + b = P'(r_0) = 0$, où $P(r) = ar^2 + br + c$. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Une base de l'espace des solutions est $\{e^{r_0 x}, x e^{r_0 x}\}$, et la solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. On obtient deux solutions complexes $Y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$, $Y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$. Comme les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles, on obtient deux solutions réelles $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, qui sont linéairement indépendantes. Alors, une base de l'espace des solutions est $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$. La solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.