Indications de correction

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PROBLÈME 1 4,5 points

<table>
<tr>
<td>Question 1 (1pt)
1.a. Il faut connaitre l'équation d'une parabole.</td>
<td>1</td>
<td>(P) a une équation de la forme : $y=ax^2+bx+c$.
Le sommet S a pour coordonnées (0 ; 20) donc $c=20$.
La fonction est dérivable et sa dérivée s'annule en zéro, on en déduit $b=0$.
Ainsi une équation de (P) est de la forme $y=ax^2+20$.

De plus B (20 ; 0) appartient à (P) donc $400a+20=0$
$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{20}$

Finalement une équation de (P) est $y=-\frac{1}{20}x^2+20$.</td>
</tr>
<tr>
<td>1.b</td>
<td>0,5</td>
<td>Le rectangle MNPQ a pour longueur 2x (on peut le constater graphiquement)et pour largeur $-\frac{1}{20}x^2+20$.
Son aire est égale à $-\frac{1}{10}x^3+40x$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 2 (2 pts)
2.a</td>
<td>0,25

0,25

0,25

0,25</td>
<td>- Dérivée:
f est dérivable sur [10 ; 15] et $f'=-\frac{3}{10}x^2+40$.

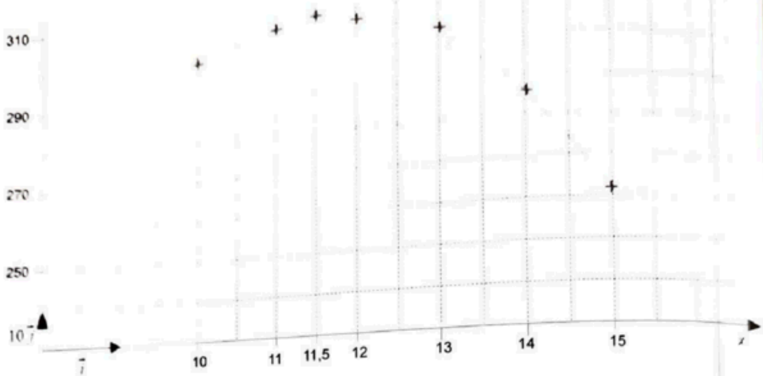
- Point où la dérivée s'annule:
De plus $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{20}{\sqrt{3}}$ que nous noterons $x_0=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

- Tableau de variation de f:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 10 & & x_0 & & 15 \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline & & & f(x) & & \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\ & 300 & & & & 262{,}5 \end{array}$$

- Maximum :
En $f(x_0)=\frac{1600\sqrt{3}}{9}$ soit $f(x_0)\simeq 307{,}92$
pour $x_0\simeq 11{,}54$</td>
</tr>
</table>

2.b	1	Représentation graphique de la fonction f



Question 3 (1 pt) 3.a	0,5	Le minimum de la fonction f, soit l'aire la plus petite est en $x = 15$. - On à alors une longueur de poutre [MN] de $2x$ soit 30 mètres - Pour une surface de $262{,}5\,m^2$
3.b	0,25 0,25	Le maximum de la fonction f, soit l'aire la plus grande est en x_0 . - On à alors une longueur de poutre de 23,08 mètres soit 2 308 cm - Pour une surface de $307{,}9\,m^2$ soit $30790\,dm^2$

PROBLÈME 2 (5,5 points)

Question 1 (1,5 point)

a. 0,5 point

$$\det(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\lambda & 1\end{vmatrix}=1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3=(1-\lambda)^3.$$

b. 0,5 point λ valeur propre $\Leftrightarrow \det(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I})=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Et $f(xi+yj+zk)=xi+yj+zk \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ z=y\\ x-3y+3z=z\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$. La dimension demandée est 1.

c. 0,5 point

- $\det(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I})=\det(\mathrm{M}-0\mathrm{I})=1\neq 0 \Rightarrow \mathrm{M}$ est inversible.
- M n'est pas diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 3.

Question 2 (1,5 point)

a. 0,5point $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow B'=(e_1, e_2, i)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. 0,5 point

$f(e_1)=e_1$, $f(e_2)=2f(i)+f(j)=2k+i-3k=i-k=-e_1+e_2$. $f(i)=k=e_1-e_2-i$.

c. 0,5 point P est la matrice de passage de B à B' ; $\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Question 3 (1,5 point)

a. 0,5 point

On raisonne par récurrence

b. 1 point

- Pour tout n, $\mathrm{N}^{n+1}=\mathrm{N}^n\times\mathrm{N} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}1 & -n & an^2+bn+c\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -(n+1) & a(n+1)^2+b(n+1)+c\\ 0 & 1 & -(n+1)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$1+n+an^2+bn+c=a(n+1)^2+b(n+1)+c \Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\ a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

- De plus, $a1^2+b1+c=1 \Rightarrow c=0$.

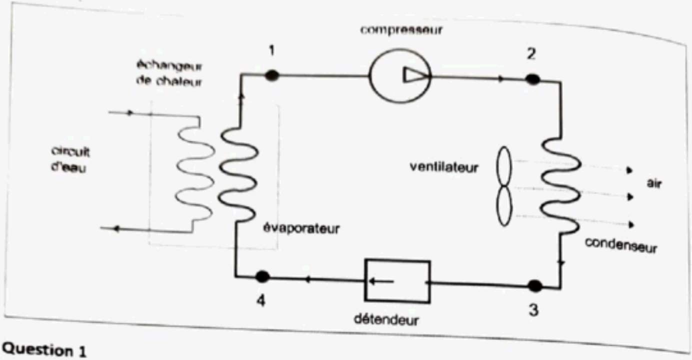
Question 4 (1 point)

$$\mathrm{M}^n=\mathrm{PN}^n\mathrm{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -n & \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -n+2 & \dfrac{n^2-3n+2}{2}\\ 1 & -n+1 & \dfrac{n^2-n}{2}\\ 1 & -n & \dfrac{n^2+n}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{n^2-3n+2}{2} & -n^2+2n & \dfrac{n^2-n}{2}\\ \dfrac{n^2-n}{2} & -n^2+1 & \dfrac{n^2+n}{2}\\ \dfrac{n^2+n}{2} & -n^2-2n & \dfrac{n^2+3n+2}{2}\end{bmatrix}.$$

PHYSIQUE APPLIQUÉE

PROBLEME N°1 : **THERMODYNAMIQUE (3,5 points)**



Question 1

La masse de fréon circulant en un point du circuit en une minute est m = 2,25 kg.
a) En déduire le nombre de moles n de fréon passant en un point du circuit en une minute.

n = m/M (nombre de moles = masse (g) / masse molaire (g/mol) = 2250 / 121

n ≈ 18,6 moles

(0,25 pt)

b) Quel volume V_1 ces n moles de fréon occupent-elles à l'état gazeux sous la pression $P_1 = 1{,}9.10^5$ Pa et à la température de $T_1 = 272$ K ? On exprimera le résultat en litres.

Loi des gaz parfaits : P.V = n.R.T

donc $V_1 = n.R.T_1 / P_1 = 18{,}6 \times 8{,}32 \times 272 / (1{,}9.10^5)$

$V_1 \approx 0{,}221 m^3 \approx 221 L$

Question 2 ***(0,5pt)***

On suppose que la transformation réalisée dans le compresseur est adiabatique et réversible. Calculer, en litres, le volume V_2 occupé par ces n moles de fréon à la pression P_2. En déduire T_2.

La transformation est adiabatique, on a donc la relation suivante : P.V^γ = constante

Donc $P_1.V_1^{\gamma} = P_2.V_2^{\gamma}$ ***soit*** $V_2 = V_1 \times (P_1/P_2)^{1/\gamma} = 0{,}221 \times (1{,}9.10^5 / 8{,}5.10^5)^{1/1{,}2}$

$V_2 \approx 0{,}063 m^3 \approx 63{,}5L$

D'où : T2 = (P2.V2) / (n.R.) = 349 K

(0,75 pt)

Question 3

Dans le condenseur (qui n'est ni un détendeur ni un compresseur), le fréon subit un refroidissement à l'état gazeux de T_2 à T_3, puis une liquéfaction à la température T_3

a) Calculer la quantité de chaleur Qa échangée par le fréon gazeux, en une minute, lors de son refroidissement de T_2 à T_3.

Le gaz subit une transformation isobqre (la pression ne varie car ce n'est ni un détendeur ni un compresseur), on a donc la relation suivante : $Q_a = n.C_p.(T_3-T_2) = 18{,}6 \times 49{,}9 \times (310-349)$

$Q_a \approx -36{,}3kJ$ *(0,75 pt)*

b) Calculer la quantité de chaleur Qb échangée par le fréon, en une minute, lors de sa liquéfaction totale.

On rappelle que la chaleur latente massique de vaporisation du fréon est L = 130 $kJ.kg^{-1}$ à 310 K.

Il y a changement d'état (liquéfaction) et donc rejet de chaleur, on a donc la relation suivante : $Q_b = -m.L = -2{,}25 \times 130 \approx -293kJ$ *(0,5pt)*

c) En déduire la quantité de chaleur Q_{23} échangée par le fréon, en une minute, dans le condenseur pour son refroidissement et sa liquéfaction.

$Q_{23} = Q_a + Q_b = -36{,}3 - 293 \approx -329kJ$ *(0,25 pt)*

Le signe négatif de Q23 indique que le fréon perd de la chaleur (il est refroidi par le ventilateur)

Question 4

Dans l'évaporateur, la valeur algébrique de quantité de chaleur Q_{41} reçue par le fréon, en une minute, est Q_{41}= 240 kJ. En déduire le débit maximal de l'eau, si l'on veut abaisser la température de celle-ci de 5,0 °C. On exprimera ce débit en litres par minute.

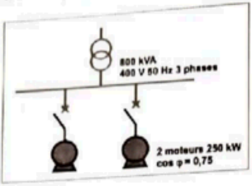
On donne la capacité thermique massique de l'eau : $C_{eau} = 4180\ J.K^{-1}.kg^{-1}$

Il faut dans ces conditions, retirer à l'eau la chaleur $Q_{41} = m.C_{eau}.\Delta T$

Soit $m = Q_{41} / (C_{eau}.\Delta T) = 240.10^3 / (4180 \times 5) = 11{,}5kg$

Cette masse correspond à un volume d'eau de 11,5L (masse volumique de l'eau étant de 1kg/L). Le débit volumique est donc D= Volume/temps = 11,5 / 1 ≈ 11,5L/mn *(0,5pt)*

PROBLEME N°2 : ELECTRICITE (3 points)



1) Calculer la puissance apparente nécessaire pour alimenter les deux moteurs fonctionnant au régime nominal, c'est à dire au rendement maxi de 80%.

   $S = 2\times P_a / \cos\Phi = 2\times(P_u /\eta_{mot}) / \cos\Phi = 2\times(250/0,80)/0,75$

   S≈833,3 kVA *(0,5pt)*

2) Le transformateur de 800 kVA est-il en surcharge ? Justifier

   833>800, le transformateur est donc en surcharge. *(0,125pt)*

3) Calculer la puissance apparente alors appelée.

   $S = 2\times P_a / \cos\Phi = 2\times(P_u /\eta_{mot}) / \cos\Phi = 2\times(250/0,80)/0,92$

   S≈679,3 kVA *(0,25pt)*

4) Le transformateur est il soulagé ?

   Oui car 800>679,3 *(0,125pt)*

5) Calculer la batterie de condensateurs à mettre en place pour y parvenir (fréquence du réseau : 50Hz). Vous calculerez pour cela Qc la puissance réactive de la batterie de condensateurs nécessaire puis :

   la capacité totale C de cette batterie couplée en étoile.

   $S^2 = P^2 + Q^2$ avec
   - $S^2 = 679,3^2 \approx 461\,516$
   - $P^2 = (2\times Pu/\eta_{mot})^2 = (2\times 250/0,80)^2 \approx 390\,625$

   Donc $Q^2 = S^2 - P^2 \approx 70\,891,4$ soit $Q \approx 266,25$ kVAR

   Or $Q = 2\times Q_{mot} + Q_c$ soit $Q_c = Q - 2\times Q_{mot} = Q - (2\times Pu/\eta_{mot})\times \tan\Phi$

   $= Q - (2\times Pu/\eta_{mot})\times \tan(\cos^{-1}\Phi)$

   Soit $Q_c = 266,25 - 2\times(250/0,80)\times \tan(41,41)$

   $Q_c \approx -285$ kVAR

   Or $Q_c = - U^2.C.$ [illegible]$U^2.C.2\pi f$ d'où $C = - Q_c / (U^2.2\pi f) = - (-285.10^3) / (230^2.2\pi.50)$

   $C \approx 5,67.10^{-3}$ F ≈ 5,67mF

(2pts)

On acceptera aussi la capacité totale C de cette batterie couplée en triangle (qui n'est pas conforme à l'énoncé mais qui des retrouve régulièrement dans le réel) .

$S^2 = P^2 + Q^2$ *avec*
- $S^2 = 679{,}3^2 \approx 461\ 516$
- $P^2 = (2\times Pu/\eta_{mot})^2 = (2\times 250/0{,}80)^2 \approx 390\ 625$

Donc $Q^2 = S^2 - P^2 \approx 70\ 891{,}4$ *soit* $Q \approx 266{,}25$ *kVAR*

Or $Q = 2\times Q_{mot} + Q_c$ *soit* $Q_c = Q - 2\times Q_{mot} = Q - (2\times Pu/\eta_{mot})\times \tan\Phi$

$= Q - (2\times Pu/\eta_{mot})\times \tan(\cos^{-1}\Phi)$

Soit $Q_c = 266{,}25 - 2\times(250/0{,}80)\times \tan(41{,}41)$

$\underline{Q_c \approx -285 \text{ kVAR}}$

Or $Q_c = -U^2.C.2\pi f$ *d'où* $C = -Q_c/(U^2.2\pi f) = -(-285.10^3)/(400^2.2\pi.50)$

$C = 17149.10^{-6}$ F = 17149 µF *(2pts)*

PROBLEME N°3 HYDRAULIQUE (3,5 points)

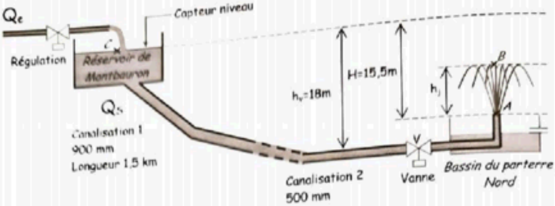


Figure 2

1) En considérant le réservoir de Montbauron de très grandes dimensions et donc en faisant une hypothèse appropriée (que vous préciserez) sur la vitesse du point C, V_C (réservoir de Montbauron), calculer la vitesse V_A du jet en sortie de la canalisation au niveau du bassin du parterre nord si on néglige les pertes de charges le long des canalisations 1 et 2 et en considérant un écoulement laminaire et permanant.

On applique le théorème de Bernoulli entre les points A et C avec les hypothèses et données dans l'énoncé:

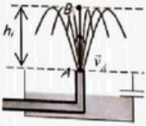
$1/2 .\rho.v_A^2 + \rho.g.z_A + P_A = ½. \rho.v_C^2 + \rho.g.z_C + P_C$

Avec $V_C = 0$ (bassin de grandes dimensions) et $P_A = P_B = P_{atm}$

Soit $V_A = [2\times g \times (Z_C - Z_A)]^{1/2} = [2\times 9,81\times 15,5]^{1/2}$

$\underline{V_A = 17,4 m.s^{-1}}$ *(0.75pt)*

2) Calculer alors la hauteur du jet hj en négligeant les frottements de l'air sur l'eau.



Dans ces conditions on peut appliquer le théorème de la conservation de l'énergie mécanique entre les point A et B :

$E_m = E_c + E_p$ = constante soit $E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$ avec

- $E_{cA} = ½.m.V_A^2$
- $E_{pA} = m.g.Z_A$
- $E_{cB} = ½.m.V_B^2 = 0$ car $V_B = 0$
- $E_{pB} = m.g.Z_B$

D'où $h_j = Z_B - Z_A = V_A^2 / (2.g) = 17,4^2 / (2\times 9,81)$

D'où $\underline{h_j = 15,5 \text{ m}}$

(0,75pt)

Le système devant fonctionner en circuit fermé, il faut ensuite transférer l'eau récupérée du parterre nord vers le réservoir de Montbauron grâce à une puissante pompe hydraulique (figure 3, échelle non représentative) et dont le débit est imposé par les contraintes de fonctionnement à **Q_e = 65 l/s**.

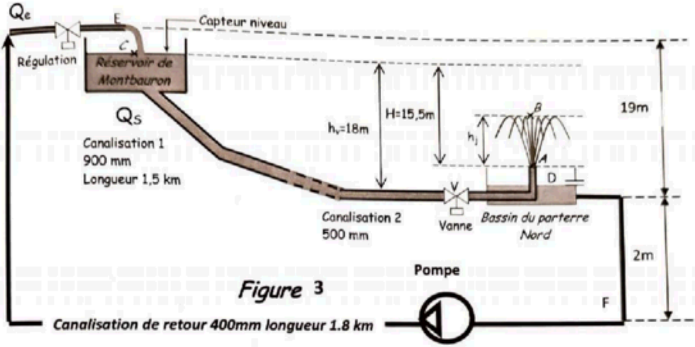


Figure 3

3) En prenant le point D à la surface de l'eau le plus défavorable, c'est-à-dire avec un bassin presque vide, et le point E en sortie de la canalisation de retour (à l'air libre), calculer les vitesses en entrée et en sortie de la canalisation de retour en supposant un débit constant et conservé et un diamètre constant sur toute sa longueur.

Il y a conservation du débit : $Q_E = Q_D = V_E.S_E = V_D.S_D$, la section reste inchangée sur toute la longueur de la canalisation dons $V_E = V_D$

Et $V_E = Q_E / S_E = Q_E / (\pi.D_E^2/4) = 65\times10^{-3} / (\pi\times0{,}4^2/4)$ (65l/s = 65×10^{-3} m^3/s)

Soit $\underline{V_E \approx 0{,}52\ m.s^{-1}}$ ***(0,5pt)***

4) Calculer alors la puissance de la pompe nécessaire pour acheminer l'eau jusqu'au réservoir de Montbauron en prenant en compte les pertes de charges totales J du circuit hydraulique (canalisation de retour) que l'on prend égales à 18 $J.kg^{-1}$.

On applique le théorème de Bernoulli généralisé dans les conditions et hypothèses de l'énoncé entre les points D vers E :

$½.\rho.V_E^2 + g.\rho.z_E + p_E - (½.\rho.V_D^2 + g.\rho.z_D + p_D) = P_{utile}/Q_v - J.\rho$

Avec $V_D=V_E$ et $p_D=p_E=p_{atm}$

D'où $P_{utile} = g.\rho.[(z_E-z_D) + J/g]\times Q_v = 9{,}81\times1000\times(19+18/9{,}81)\times65.10^{-3}$

(Rque: Une perte de charges de 18J/kg correspond à une perte de charges de 18/9.81=1,83m)

Finalement $\underline{P_{utile} \approx 13\ 285\ W \approx 13{,}3kW}$ ***(1,5pt)***