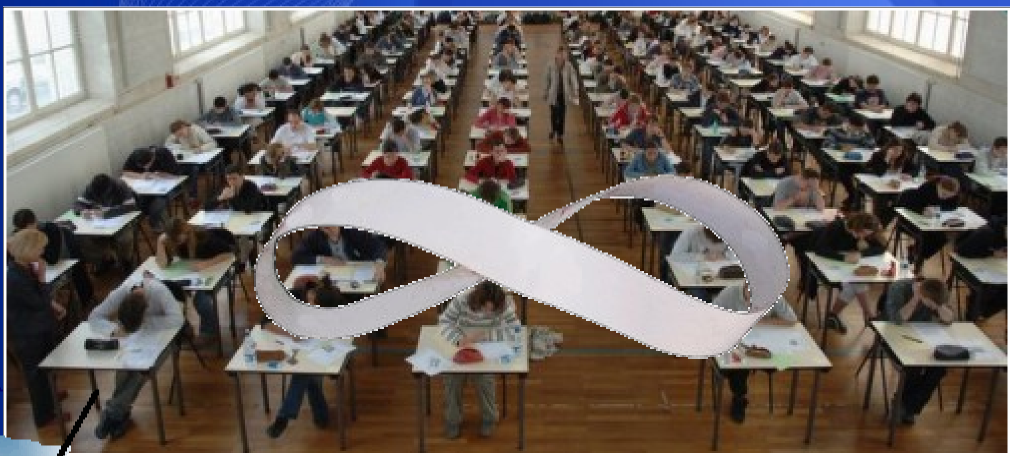
BankAnnales 2010

Mathématiques S

Obligatoire & Spécialité

Les seules Annales avec

- *Sujets inédits session 2008*
- *Premiers sujets session 2009*
- *Résumé des dernières tendances*
- *Analyse des derniers sujets*
- *Exercices antérieurs ciblés*
- *Exercices antérieurs complémentaires*



18 juin 2009
4ème édition

Xavier ANDREANI
TI-Bank

Table des matières

Mot de l'auteur

Xavier Andréani

andreanx@hotmail.com

I. L'épreuve

Ce recueil a pour but:

- de vous présenter les derniers sujets du BAC, tombés à partir du mois de septembre, et qui donc ne sont pas disponibles dans le commerce (les annales étant éditées au mois d'août, et n'étant pas rééditées en cours d'année scolaire).
- d'analyser les sujets les plus récents, afin de déduire les consignes qui ont été données aux concepteurs de sujets pour la nouvelle session – en effet, depuis 2003, il y a eu des nouveautés chaque année à l'épreuve de mathématiques

Ce recueil se concentre donc sur la nouveauté, afin que vous sachiez à quoi vous attendre, et puissiez mieux vous préparer.

Aucune correction n'est proposée. En effet, mon expérience personnelle montre que beaucoup d'élèves ont tendance à regarder la correction trop vite. Or, la réponse aura de bien meilleures chances d'être retenue, et ressortie dans le bon contexte, que si elle a été ***cherchée*** avant d'être trouvée ou donnée à l'élève.

Rien ne vous empêche toutefois de demander de l'aide à un professeur, qui saura donc vous guider, vous amener à trouver par vous-même, et donc à savoir refaire.

A défaut, après avoir cherché, vous pouvez par exemple venir demander de l'aide sur le forum TI-Bank à la rubrique suivante: http://tibank.forumactif.com/blabla-f18

- Dans une première partie seront analysées les statistiques concernant les épreuves antérieures.
- Dans une seconde partie seront présentés les sujets inédits complets.
- Dans une troisième partie seront présentés des exercices antérieurs sur des thèmes qui pourraient tomber cette année, selon ce qui aura été déduit des deux premières parties.
- Enfin dans une quatrième partie seront présentés des exercices antérieurs complémentaires afin d'approfondir vos connaissances, notamment sur les gros chapitres du programme qui ne seraient que partiellement couverts par les parties d'avant.

A) Les sujets inédits

Les ***sujets inédits*** sont les sujets de BAC qui tombent à partir de septembre. On distingue deux types de sujets:

- ➔ les sujets inédits clôturant la session BAC précédente: de septembre à mars
- ➔ les sujets inédits inaugurant la nouvelle session BAC: de avril à juin

L'utilité de ces sujets est double:

- ➔ Ces sujets n'étant pas disponibles dans le commerce avant l'année scolaire suivante, les professeurs en profitent souvent et s'inspirent de ces sujets pour les ***devoirs surveillés*** mais surtout ***bac blancs***, et ***devoirs de fin d'année***..
- ➔ De plus, les sujets inaugurant la nouvelle session sont (dans leur forme) significatifs de ce que vous aurez au BAC, car ils respectent les nouvelles consignes qui ont éventuellement été données aux concepteurs de sujets.

Il est donc très important (du moins en mathématiques) de travailler les tous derniers sujets.

B) Calendrier des sujets inédits

Session 2008	Jeudi 4 septembre 2008:	Polynésie française *(remplacement)*
	Vendredi 5 septembre 2008:	France métropole *(remplacement)* Antilles-Guyane-Guadeloupe-Martinique *(remplacement)*
	Du 12 au 17 novembre 2008:	Nouvelle Calédonie
	Novembre 2008:	Amérique du Sud
	Mars 2009:	Nouvelle Calédonie *(remplacement)*
Session 2009	Jeudi 16 avril 2009:	Inde
	Jeudi 4 juin 2009:	Amérique du Nord
	Lundi 15 juin 2009:	Polynésie française Centres étrangers (Europe / Afrique)
	Jeudi 11 juin 2009:	Liban
	Mardi 16 juin 2009:	Asie
	Mardi 23 juin 2009:	**France métropolitaine** Antilles / Guyane / Guadeloupe / Martinique Île de la Réunion / Mayotte

Légende:

sujet inédit contenu dans ce livret
sujet inédit tombé mais non récupéré
sujet tombant avant l'épreuve métropolitaine
sujet qui tombera trop tard

Comme précisé précédemment, gardez le contact pour obtenir les derniers sujets. Consultez les dernières nouvelles et mises-à-jour de ce document sur: http://ti.bank.free.fr

A défaut de mise-à-jour, vous pouvez tenter de récupérer les sujets vous-même:

- Amérique du Nord : http://www.rochambeau.org/informations/examens/examens.html
- Polynésie : http://www.des.pf/view.php?1056388010-303378
- Centres Étrangers : http://www.lgp.ae/examens/examindex.html
- Antilles/Guyane : http://www-peda.ac-martinique.fr/maths/bac.shtml
- Liban : http://www.clw.edu.lb/cdi/
- Île de la Réunion : http://pagesperso-orange.fr/apmep_reunion/page_bac.htm
- Asie : http://www.fis.edu.hk/web/Default.aspx?lang=fr-fr&r=11
- Toutes académies : http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article2360

C) Historique des évolutions récentes de l'épreuve

Depuis l'abrogation de l'ancienne maquette en 2004, l'épreuve de mathématique a évolué chaque année, introduisant sans arrêt des nouveautés, semblant chercher une nouvelle forme, sans jamais la trouver. C'est pour cela qu'il faut toujours être au courant des derniers sujets.

2002	• expérimentations isolées d'exercices de type QCM
2003	• expérimentations isolées d'exercices de type QCM • expérimentation isolée d'une épreuve sans calculatrice
2004	• introduction généralisée d'exercices de type QCM • modification de la maquette de l'épreuve: de 2 exercices sur 5 points, plus un problème d'étude de fonction sur 10 points, on passe à 3 à 5 exercices, sur des thèmes variés du programme, et notés à peu près équitablement • suppression du formulaire
2005	• présence massive d'exercices de type QCM • introduction généralisée d'exercices de type ROC • expérimentation isolée d'un exercice piégeant la calculatrice
2006	• retour des études de fonctions (assez boudées depuis la suppression du problème en 2004) • apparition d'exercices prépondérants notés sur 7 ou 8 points (bref - retour du problème supprimé en 2004) • mais paradoxalement aussi, apparition de sujets avec 5 exercices • expérimentations isolées d'exercices de type question de recherche
2007	• part anormalement élevée (presque 1 sujet sur 2) d'exercices portant sur des thèmes de Première (barycentres, produits scalaires, mais surtout trigonométrie... je conseille d'ailleurs à ce sujet le programme suivant: http://ti.bank.free.fr/index.php?mod=news&ac=commentaires&id=733)
2008	• introduction généralisée de la question de recherche • part non négligeable de thèmes de Première (barycentres, produits scalaires...) • expérimentations isolées d'exercices avec des lectures graphiques

D) Les tendances suite à la dernière session

1) Calculatrices autorisées

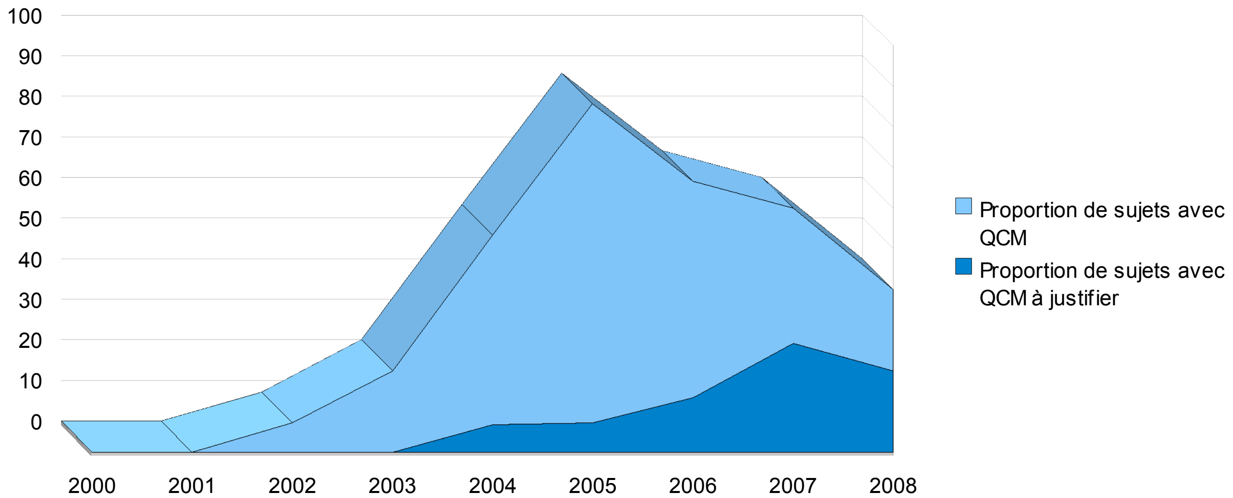
Depuis la session 2000, la calculatrice n'a été interdite qu'une seule fois en Asie en juin 2003. Comme cela ne s'est pas reproduit, je pense que les résultats *(catastrophiques?...)* de cette expérimentation n'ont pas été encourageants pour généraliser cette pratique. De plus, à mon avis ce n'est plus d'actualité, surtout à l'heure où on veut introduire une épreuve pratique pour apprendre aux élèves à mieux se servir de leur calculatrice (ou ordinateur) dans une démarche de recherche.

➔ ***La calculatrice devrait donc être autorisée!***

N'hésitez donc pas à venir la remplir en puisant dans mes propres programmes (http://ti.bank.free.fr/index.php?mod=archives&ac=voir2&id=1080), et plus généralement dans tout ce qui est disponible sur http://ti.bank.free.fr.

2) Un QCM en voie de disparition

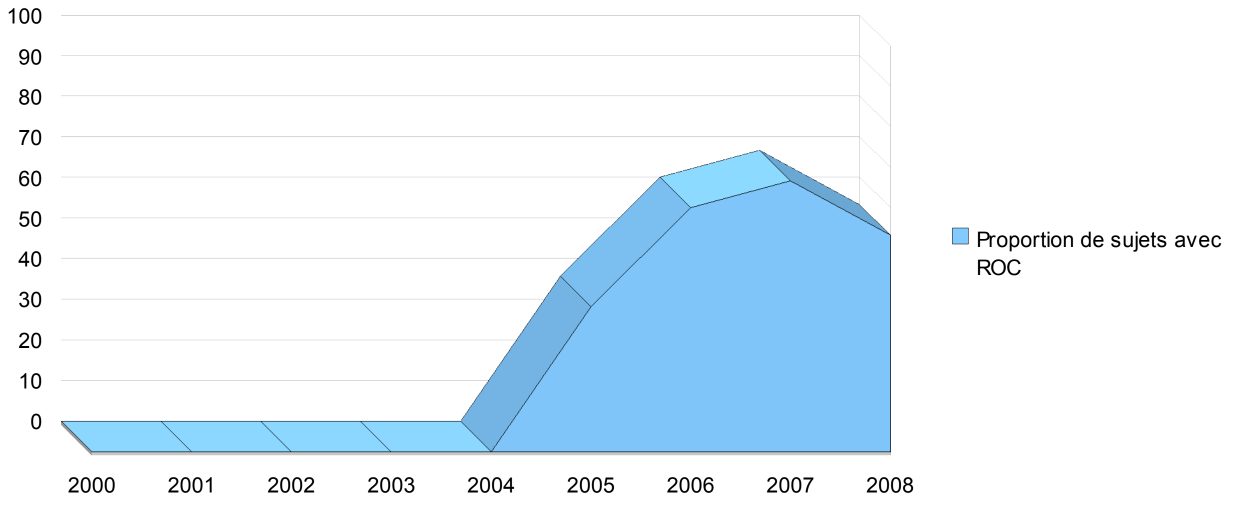
Expérimenté en 2002-2003, puis introduit massivement en 2004-2005 (85% des sujets au pic de 2005), le QCM a été victime de son succès. En effet, sa sur-utilisation en a très largement montré les limites: sans justification, il est très facile de l'expédier en 5 minutes avec une bonne calculatrice. Pour déjouer cette astuce, on demande de plus en plus de justifier (pour moitié à la session 2008), et l'on attribue de moins en moins de points de pénalités (points négatifs). Mais dans ce cas, on s'éloigne grandement de l'esprit initial et de l'intérêt d'un exercice de type QCM: autant poser directement un exercice dans ce cas. Cela explique la chute depuis 2005 de la part de sujets avec QCM, qui ne représentaient plus qu'un sujet sur trois en 2008, chute qui devrait logiquement se poursuivre.



➔ ***Vous ne devriez donc pas avoir de QCM, ou à la rigueur un QCM avec justification (exercices qui prennent alors souvent la forme de Vrai/Faux).***

3) Une ROC détrônée

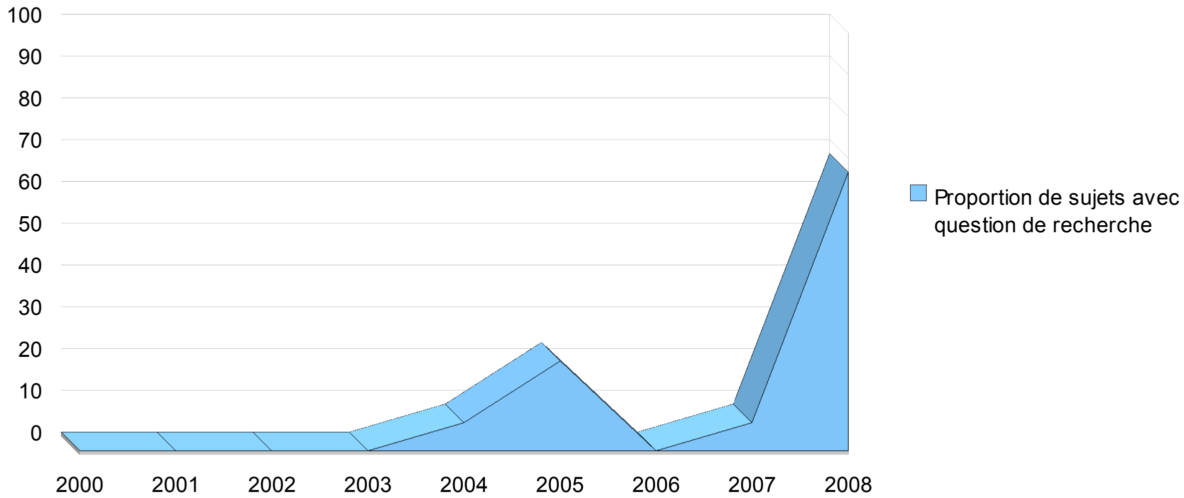
En l'introduisant brutalement à la session 2005, on connaissait déjà les défauts de la ROC. En effet, il serait très facile de restituer une démonstration de cours apprise par cœur, ou entrée dans la calculatrice. Pour contrer cela, dès le début les consignes officielles étaient de guider/imposer la démonstration dans l'énoncé. Comme il y a diverses méthodes pour redémontrer un même résultat (selon les prérequis considérés), il y a peu de chances que la démonstration demandée soit alors exactement celle du cours ou de la calculatrice. Le défaut qui en résulte, est que cette contrainte imposée dans l'énoncé est en fait un merveilleux indice, sur comment démontrer (bref, une arme à double tranchant). Toute la phase de réflexion/recherche s'en retrouve alors court-circuitée. Après s'être tassée en 2006-2007, à la session 2008 la part de sujets avec questions de cours a enfin diminué, baisse qui devrait se poursuivre car c'est la question de recherche (voir plus loin) qui remplace les questions de cours.



➔ ***Les ROC ne devraient vraiment être qu'exceptionnelles cette année.***

4) Une question de recherche dans le vent

Après quelques expérimentations isolées en 2004, 2005 et 2007, la question de recherche est introduite massivement à la session 2008. Il s'agit d'un exercice ou d'une partie d'exercice énonçant un but à démontrer. La question peut s'arrêter là, ou éventuellement fournir un nombre restreint de sous-questions pour vous mettre sur la voie. C'est donc une question où vous n'êtes pas ou peu guidé: c'est comme si il manquait une partie de l'énoncé (tout ou partie des sous-questions). Cette question permet donc d'évaluer réellement l'esprit d'analyse et de synthèse, et pallie aux défauts de la ROC qu'elle tend à remplacer. La progression de la part des questions de recherche devrait se poursuivre.



➔ ***Vous devriez avoir une ou deux question de recherche cette année.***

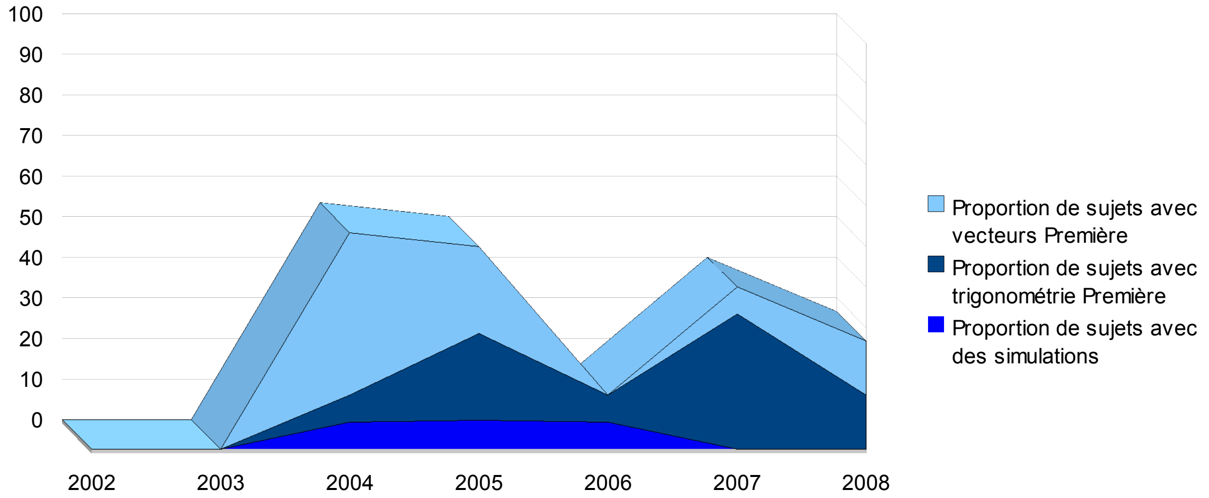
N'hésitez donc pas à consulter plus loin *(partie III A)*, les archives de toutes les questions de recherche tombées au BAC depuis 2005.

5) Des thèmes de Première de plus en plus fréquents

On peut également constater depuis 2004, la présence importante par accous de thèmes vus en Première (et qui ne sont pas forcément *bien* revus en Terminale selon le temps dont dispose le professeur – car ces thèmes justement ne sont pas au programme de cette classe qui est déjà assez lourd).

Ces thèmes incluent:

- la trigonométrie *(fonctions, formules d'addition, de duplication...)*
- les vecteurs *(barycentres, produits scalaires, lignes de niveau, ensemble de point...)*
- les statistiques *(mesure de la dispersion: médiane, quartiles – dans les simulations)*



Notamment à la session 2007, il y a eu un nombre anormalement élevé d'exercices sur la trigonométrie. Depuis, les vecteurs (notamment barycentres) semblent prendre le relai. Les simulations (thème commun avec les séries ES) ne sont plus tombées depuis 2006. Mais les ES viennent juste de l'avoir au sujet d'Amérique du Nord juin 2009. De plus, le programme de Seconde 2010 qui vient d'être publié met l'accent sur cette partie. Il se pourrait bien que ça revienne à la mode...

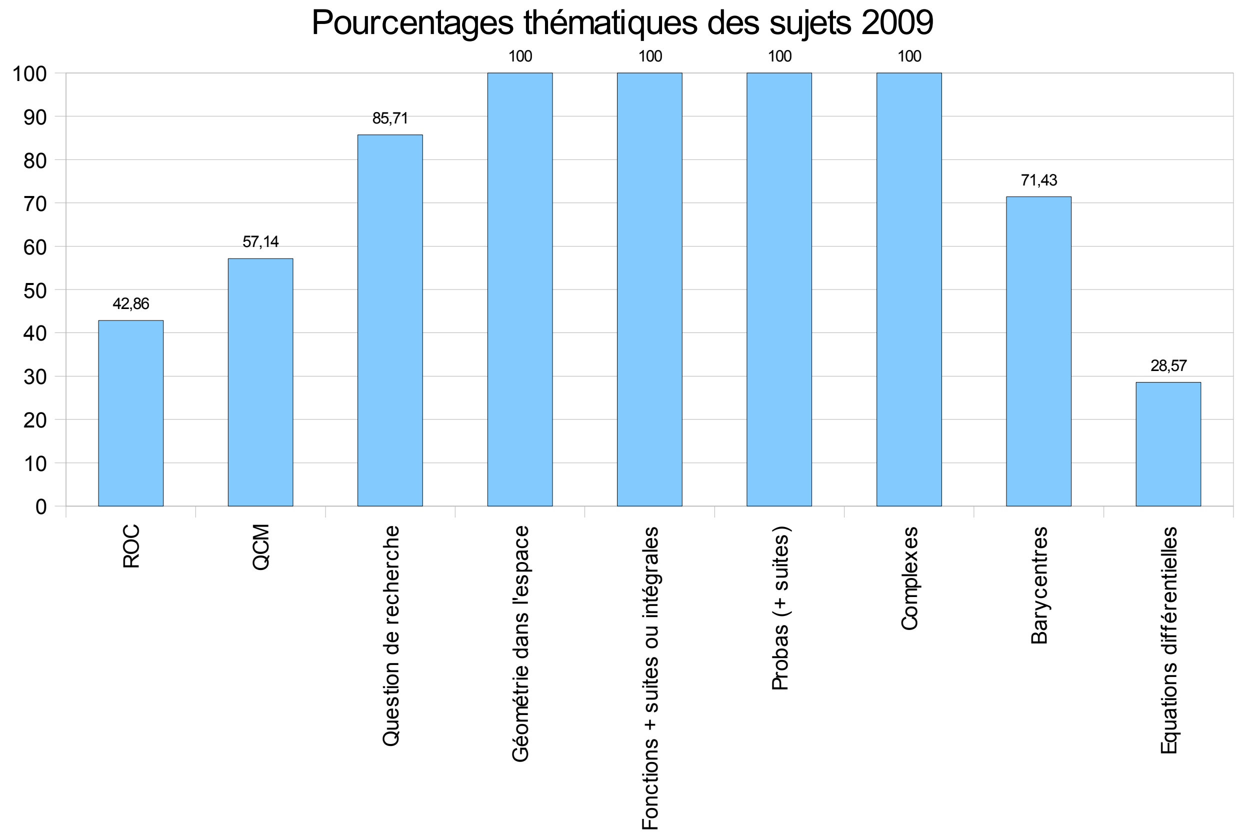
➔ ***Vous pourriez donc avoir un exercice utilisant des notions / méthodes de Première.***

A cette fin, j'ai inclus plus loin *(partie III C)*, les archives de tous les exercices du BAC ayant porté sur des thèmes de Première.

E) Esquisse de la prochaine épreuve du BAC

Dans cette partie, je vais tenter de vous esquisser la prochaine épreuve du BAC, en analysant les premiers sujets de la nouvelle session (depuis mars). En effet, ces sujets sont représentatifs des nouvelles consignes données aux concepteurs de sujets, consignes qui comme vous l'avez maintenant compris, changent chaque année.

Voici ce que donnent les thèmes et types d'exercices tombés:



Plusieurs des tendances des sessions antérieures se confirment:

- Un nombre restreint de QCM (4 sujets sur 7), mais demandant presque tous (3 sujets) justification.
- Un nombre restreint de ROC (3 sujets sur 7).
- La question de recherche, poursuit sa progression en passant de 65% à 86% (6 sujets sur 7).
- Un nombre anormalement élevé d'exercices utilisant un thème de Première, les barycentres (5 sujets sur 7).

Mais on remarque aussi qu'il y a:

- 100% de sujets avec des **complexes** *(c'est normal)*
- 100% de sujets avec des **probas** *(c'est un peu fort...)*
- 100% de sujets avec de la **géométrie dans l'espace** *(là c'en est trop...)*
- 100% de sujets avec des fonctions, mais pas de banales études de fonctions: le superbe mélange **fonctions/suites/intégrales** dans tous les cas!!!

En gros, ces 7 sujets sont TOUS pareils! Ils sortent du même moule! Comme si les concepteurs de sujets avaient eu des consignes très précises cette année...

Donc, votre sujet (le 8ème) devrait être pareil et contenir probablement:

- **un exercice mélangeant les fonctions, suites et intégrales**
- **un exercice de complexes**
- **un exercice de géométrie dans l'espace**
- **un exercice de probabilités**

De plus:

- **des barycentres devraient être évoqués dans l'exercice de complexe, ou celui de géométrie dans l'espace**
- **une question de recherche devrait conclure un ou deux des exercices cités**

Remarque:

Il y a toutefois 1 petite originalité dans l'un des sujets qu'il est bon de citer

Concernant les questions de recherche, dans le sujet d'Inde, on remarque des particularités. Ces particularités concentrées dans l'exercice 1.

- La courbe détaillée de la fonction est donnée... C'est assez inhabituel en série S, surtout lorsqu'il n'y a aucune construction graphique à faire, ni aucune question de lecture graphique. En fait l'explication est simple: si vous tentez d'obtenir le graphe de cette fonction sur votre calculatrice, il y a toutes les chances que vous ne voyez pas grand chose... *(en effet, avec un maximum inférieur à 0.5, situé entre 0 et 1, et de plus suivi d'une asymptote vers 0, il y a toutes les chances que la courbe soit confondue avec l'axe horizontal)*. C'est donc un piège à calculatrices!!!
- Mais ce n'est pas tout... Car en seconde partie avec une suite, la question de recherche demande aussi d'expliquer pourquoi la calculatrice donne des

résultats incohérents *(la valeur de rang 5 serait identique à la limite en l'infini...)*. Pour expliquer ce genre de chose, il faut comprendre comment la calculatrice calcule. L'explication rapide doit parler d'***arrondi***; l'explication complète de la notion de ***chiffres significatifs***. Pour cela, vous pouvez lire l'article « Un mauvais coup de Raymonde » sur http://ti.bank.free.fr/index.php?mod=archives&ac=voir&id=56

Cela fait donc dans le même exercice, une concentration de deux pièges à calculatrices. Ce type d'exercice était déjà cité dans les textes officiels de la nouvelle maquette de 2004. Il a d'ailleurs déjà été expérimenté mais de façons isolée au BAC.

➔ ***Gardez donc en tête qu'une question de recherche peut vous demander le fonctionnement logique et les erreurs de votre calculatrice.***

A cette fin, j'ai inclus ci après *(partie III B)* les archives de tous les exercices de ce type tombés à ce jour.

Vous pouvez de plus venir poser vos questions sur le fonctionnement de votre calculatrice sur le forum TI-Bank: http://tibank.forumactif.com/forum.htm.

F) Planning des dernières révisions

D'après l'analyse précédente, il vous faut donc réviser en priorité:

- **les complexes**
- **la géométrie dans l'espace**
- **les probabilités**
- **le mélange fonctions/suites/intégrales**
- **les barycentres**
- **les questions de recherche**

La quasi-totalité de ce dont vous avez besoin est déjà inclus dans ce document *(je commençais déjà à sentir la tendance...)*.

- Les **complexes**, la **géométrie dans l'espace**, et les **probabilités** sont de grosses parties. Pour les réviser dans leur ensemble, je vous conseille donc de faire les exercices de la ***partie IV***. Ce sont essentiellement des QCM, qui vous feront donc réviser rapidement l'ensemble des très nombreuses méthodes de ces parties.

- Pour les **barycentres**, je vous conseille les exercices de la ***partie III C) 2)***.

- Pour les **questions de recherche**, vous en trouverez toute la collection dans la ***partie III A)***

- Enfin, pour le **mélange fonctions/suites/intégrales**, il faut travailler les exercices correspondants dans les derniers sujets de maths présents dans la ***partie II B)***.

Pour le week-end avant le BAC, vous pouvez répartir ça tranquillement sur la soirée du vendredi, la journée du samedi et du dimanche. Planifiez bien pour équilibrer les révisions.

Si le week-end est passé et que vous preniez ce document en cours de route, je vous conseille de vous concentrer essentiellement sur les QCM de la ***partie IV***.

II. Sujets complets

A) Session 2008 – sujets inédits

1) Polynésie septembre 2008 *(obligatoire)*

Session 2008

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

08 MAOSPO 3 Page 1/6

EXERCICE 1 (4 points)

On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- B_1 l'événement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'événement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'événement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

   a) Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \frac{3}{4}$.

   b) Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

   c) Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

   Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

   On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A.

   a) Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

   b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.

   Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \frac{1}{4}$?

EXERCICE 2 (5 points)

On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée ».

Sur la figure donnée en annexe, page 6, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$;

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

PARTIE A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
   En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.
   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. a) Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

   b) En déduire que les points F, P et K sont alignés.

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note $(x, y, 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

   b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y.

   c) Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe, page 6

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24\,x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$ où α et β sont deux réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05\,v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le v_n < v_{n+1} \le 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Partie A – Étude de la fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
   Étudier la position relative de (C) et de (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).

4. Étudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d') sur la feuille annexe.

Partie B – Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.

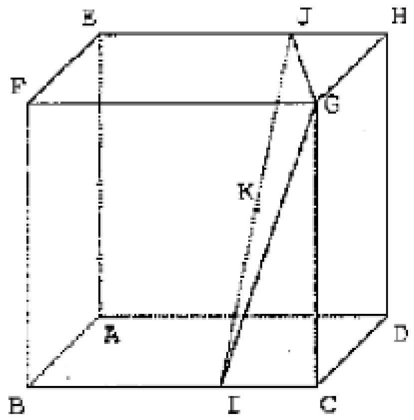
2. Montrer que, pour tout $X \in [0; +\infty[$, $\ln(1 + X) \leq X$.

3. En déduire que $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}\,dx$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.

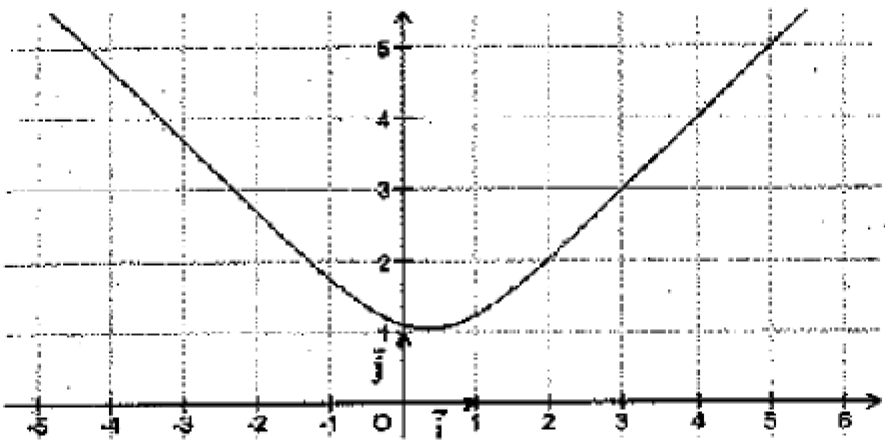
Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 2



EXERCICE 4



08 MAOSPO 3

Page 6/6

2) France septembre 2008

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

obligatoire

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. **Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.** **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE N°1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Soient E et F les événements :
E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$.

3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 €).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4) Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1-(0,9)^n$.

b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

EXERCICE N°2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $x\,f'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$.

1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y'=2y+8$.

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\,h(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A (ln 2, 0) ? Si oui la préciser.

<u>EXERCICE N°3</u> (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

1) C est le barycentre des points pondérés (A, m) , $(B, 1)$ et $(D, 1)$ lorsque :
a) $m = -2$ **b)** $m = 2$ **c)** $m = -1$ **d)** $m = 3$

2) a) B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3) L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$ est :

a) la médiatrice de $[AC]$.
b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c) la médiatrice de $[AI]$.
d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

4) L'ensemble des points M du plan tels que $\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$ est :

a) la médiatrice de $[AC]$.
b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c) la médiatrice de $[AI]$.
d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

EXERCICE N°4 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt$.

1) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2) *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt$.

a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE N°5 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = \dfrac{z-5}{z-1}$. Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A :

1) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I' image de I.
Vérifier que I' appartient à $(\mathscr{C})$.

2) a) Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $OM' = \dfrac{MB}{MA}$.

b) Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

Partie B :

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M'.

1) Démontrer que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

2) On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T).
(d) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

a) Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)$, démontrer que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

b) En déduire une construction de M'.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

8 MASSME 3 **Page 1/6**

EXERCICE N°5 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A :

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1) a) Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b) Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n e^{\frac{in\pi}{3}}$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $[O; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B :

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.
Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1) Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2) Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3) Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $[O; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

3) Antilles-Guyane septembre 2008 *(spécialité)*

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

   b. Calculer S_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 2 \quad (\text{modulo } 3) \\ n & \equiv & 1 \quad (\text{modulo } 5) \end{array}\right. \text{, où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = e^{i\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{5}}$.
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

   a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?

   b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}\right)$.

   c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

   b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?

   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.

4. a. Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. **a.** Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$.

   b. Soit λ un réel strictement négatif.

   On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

   Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln\left(\mathrm{e}^\lambda + 3\right)$.

   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'ume U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note
  V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »
  V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».
Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.
2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

   On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.
4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

   On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

   Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

4) Nouvelle Calédonie novembre 2008

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(3\,;\,-2\,;\,1) \qquad B(5\,;\,2\,;\,-3)$$
$$C(6\,;\,-2\,;\,-2) \qquad D(4\,;\,3\,;\,2)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation du plan (ABC).

   c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K,

   a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

   b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

   c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

   $$z_K = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

   $$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.

   b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.
3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

   $$OM \times OM' = 4.$$

   b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.
4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

   a. Calculer OK′ et OH′.

   b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(3\,;\,-2\,;\,1) \qquad B(5\,;\,2\,;\,-3)$$
$$C(6\,;\,-2\,;\,-2) \qquad D(4\,;\,3\,;\,2)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
   c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K,
   a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.
   b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.
   c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_K = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.
   b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.
3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

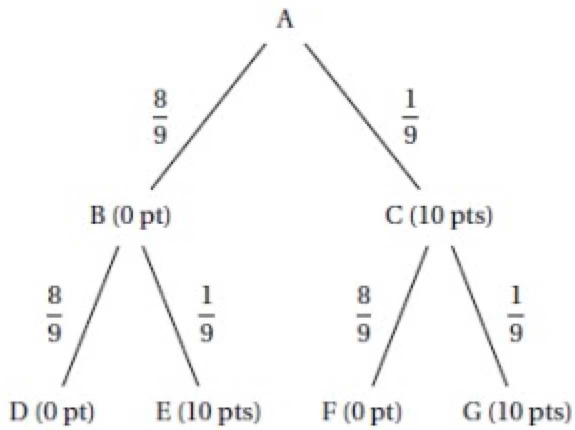
$$OM \times OM' = 4.$$

   b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.
4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.
   a. Calculer OK′ et OH′.
   b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X.
   c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième
   b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

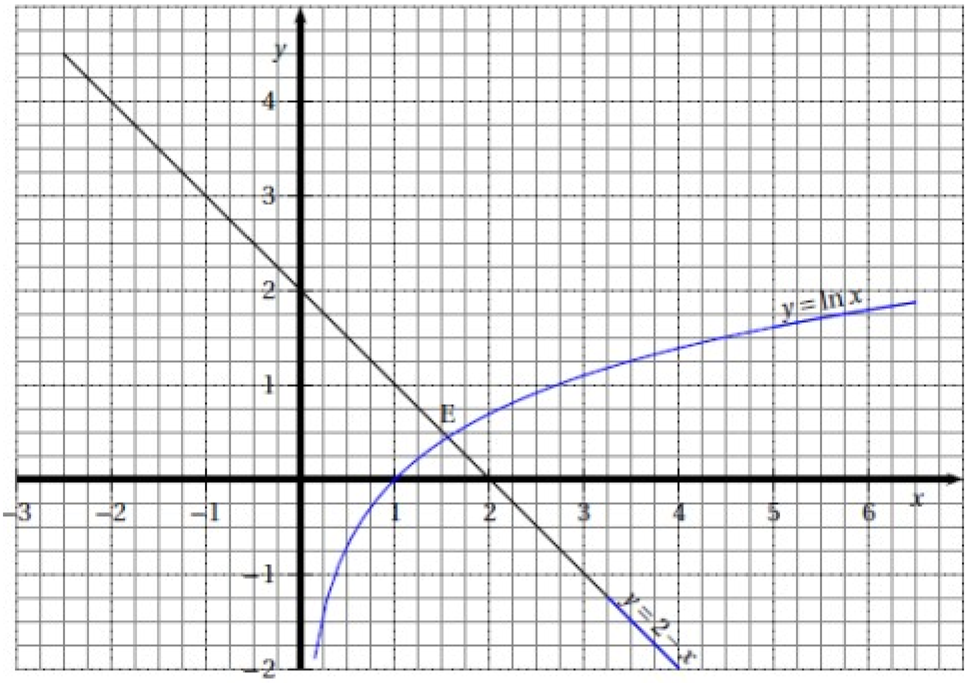
1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x \, \mathrm{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de I.
   b. Calculer I, en fonction de α, à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de α.

EXERCICE 5 — **3 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

   $$\begin{cases} g'(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la PARTIE A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

5) Amérique du Sud novembre 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

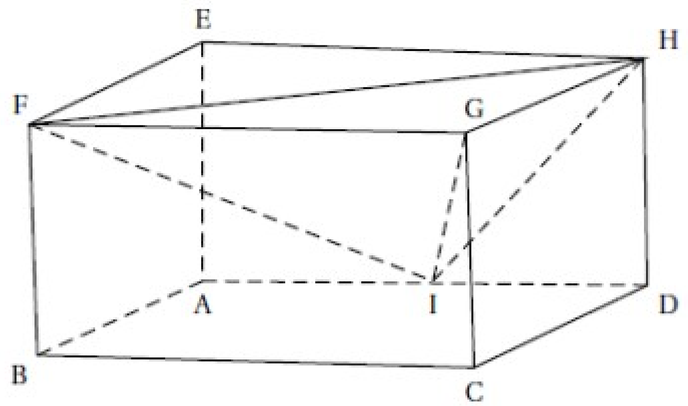
1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.
   a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z - z_I}{z - a}$ soit un réel ?
   b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel.
   c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.
3. a. Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
   b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer l'écriture complexe de r_1.
4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.
   Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
   En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.
   b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2~;~1~;~-1)$.

   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

   c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

   b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

   c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?

   (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0;0;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1;1;0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t' \\ y &=& 1-t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. **Une équation de S**

   a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

   Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}~;~\dfrac{x-y}{2}~;~2-z\right)$.

   En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.

   Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

   c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. **Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$**

   a. On coupe S par le plan $(x\mathrm{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

   b. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$.

   Quelle est la nature de la section obtenue ?

   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

   On coupe S par le plan d'équation $x+y=0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

   a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle : $2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E$'$)

   a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E}'\text{)}.$$

   b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E$'$).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

   b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

6) Nouvelle Calédonie mars 2008 *(obligatoire)*

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = 3+4\text{i}$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_{\text{C}} = 2\sqrt{3}+\text{i}(-2-\sqrt{3})$ et $z_{\text{D}} = -2\sqrt{3}+\text{i}(-2+\sqrt{3})$.

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. **a.** Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_{F} du point F est -2i.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].

c. Montrer que $\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{F}}}{z_{\text{A}}-z_{\text{F}}} = -\text{i}\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{F}}}{z_{\text{A}}-z_{\text{F}}}$.

Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$\text{A}(4\,;0\,;0),\quad \text{B}(0\,;2\,;0),\quad \text{C}(0\,;0\,;3)\quad \text{et E}\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_{E} du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ la distance δ_{M} du point M au plan $(\mathscr{P})$ est égale à :

$$\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4).

Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_{E}.

2. **a.** Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

B) Session 2009 – premiers sujets

1) Inde avril 2009

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

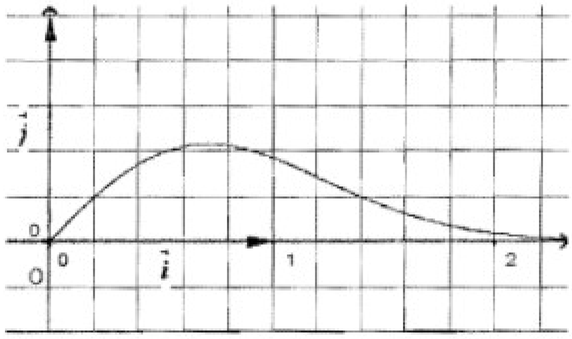
Exercice 1 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$$

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. *a.* Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,4999382951	0,4999999437	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

Exercice 2 (*5 points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3-\mathrm{i},\ b = 1-3\mathrm{i} \text{ et } c = -1-\mathrm{i}.$$

1. *a.* Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   b. En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   b. Calculer $|q-2-\mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points :

A de coordonnées $(1,1,0)$, B de coordonnées $(2,0,3)$, C de coordonnées $(0,-2,5)$ et D de coordonnées $(1,-5,5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3,3,0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3=0$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X=2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
On considère les événements D et A suivants :
   - D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   b. En déduire que : $p(A)=\frac{7}{48}$.

   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On note B_n l'événement «obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'événement B_n.

   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}$ et $z_B = 1+2\mathrm{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :
$$S(O) = A \text{ et } S(A) = B.$$
2. Montrer que l'écriture complexe de S est :
$$z' = (1-\mathrm{i})z + \mathrm{i}.$$
Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points $\left(A_n\right)$ telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S\left(A_n\right)$.

On note z_n l'affixe de A_n (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1-(1-\mathrm{i})^n$.

   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.

   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.

   Construire les points A_3 et A_4.

4. *a.* Quels sont les points de la suite $\left(A_n\right)$ appartenant à la droite (ΩB) ?

Exercice 3 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

A de coordonnées $(1,1,0)$, B de coordonnées $(2,0,3)$, C de coordonnées $(0,-2,5)$ et D de coordonnées $(1,-5,5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\left\{(A,1),(B,1),(C,2)\right\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3,3,0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3 = 0$.

2) Amérique du Nord juin 2009

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours.

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.

Pour t appartenant à $[0,30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.

On a donc $y(0)=0,01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0,30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y'=0,05y(10-y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0,30]$ par $z=\dfrac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0)=0,01 \\ y'=0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0,5z+0,05 \end{cases}$

2. a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

   b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin.

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10% des individus sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b. En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

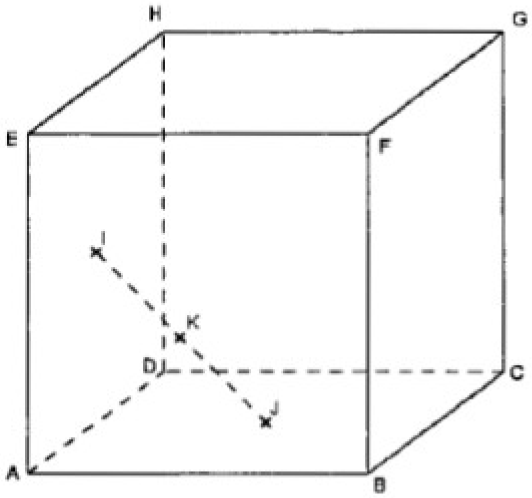
   b. Étudier les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment $[IJ]$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A;\overline{AB},\overline{AD},\overline{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. a) Démontrer que le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).
   c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
   Soit L le centre du carré DCGH.
   a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].
   b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$.

Partie A Étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe page 6 (figure 1).

1. **a.** Exprimer $\dfrac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

   b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2. Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2i$.

3. **a.** Montrer que la droite (AC) a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$.

   b. Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B Étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

On considère la rotation de centre O et d'angle θ.

On note A′ le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B′ le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe page 6 (figure 2).

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.

2. Soit P le point d'affixe p milieu de $[AA']$ et Q le point d'affixe q milieu de $[BB']$.

   a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.

   b. Démontrer que $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.

   c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

   d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

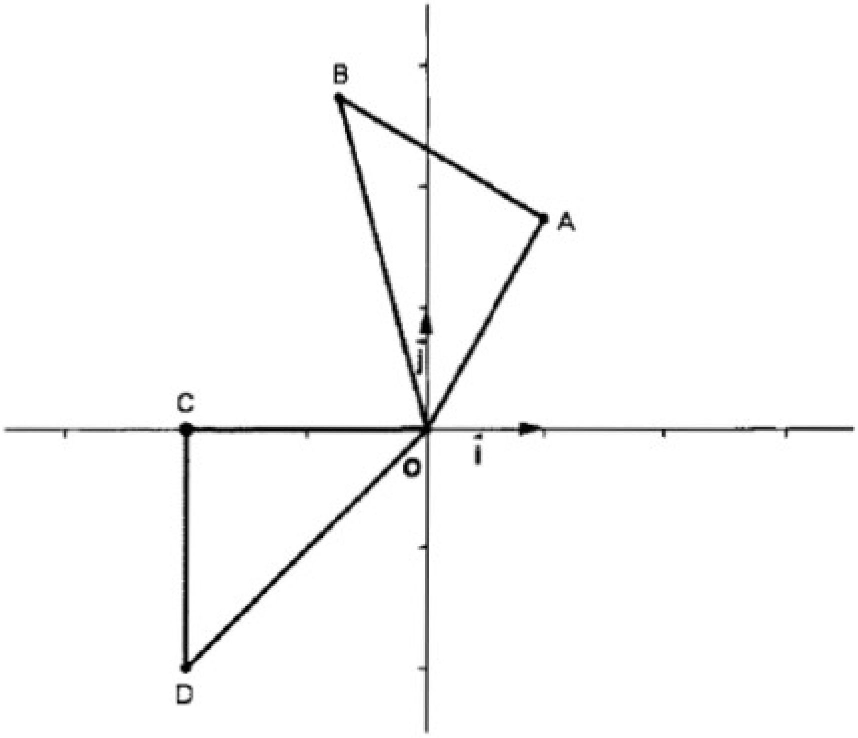
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4

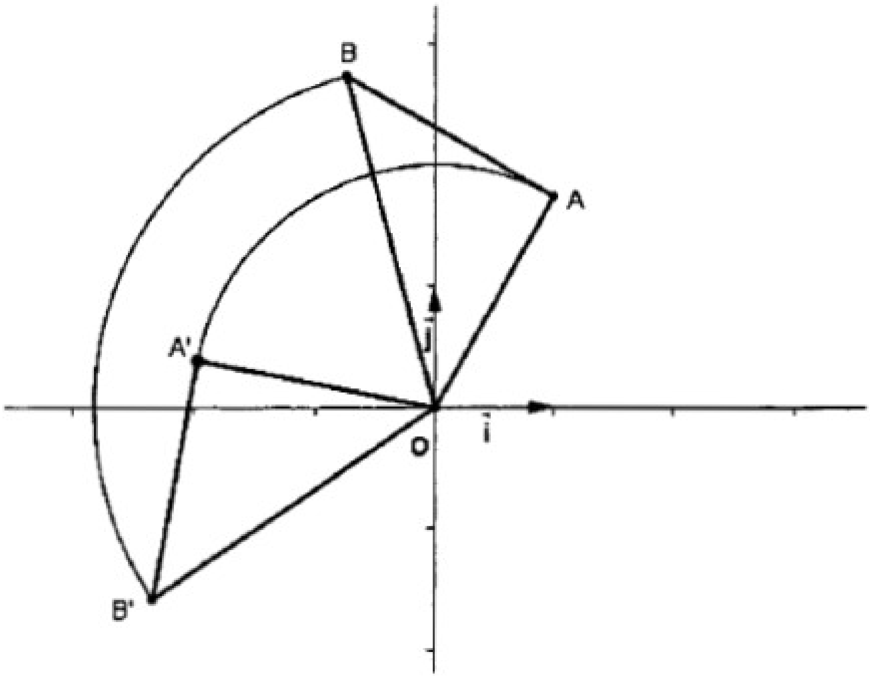
Partie A

Figure 1



Partie B

Figure 2



9MAOSAN1 **Page 6/6**

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 4 (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1,46]$.

1. On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
   - **b.** Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).
   - **c.** En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1\ (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   - **a.** Montrer que si $ab \equiv 0\ (47)$ alors $a \equiv 0\ (47)$ ou $b \equiv 0\ (47)$.
   - **b.** En déduire que si $a^2 \equiv 1\ (47)$ alors $a \equiv 1\ (47)$ ou $a \equiv -1\ (47)$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1\,(47)$.

   Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1\,(47)$.

   Par exemple :

   $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1\ (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1\ (47)$, $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1\ (47)$ ...

   b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

   c. Montrer que $46! \equiv -1\,(47)$.

3) Liban juin 2009

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

La page 6/6 est une annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

   On sait que $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{4}{5}$ et $p(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{3}{5}$.

   La probabilité de l'événement B est égale à :

   a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x$.

La courbe(C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

   c) Étudier la position relative de (D) et de (C).

   d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(e^{x}+1\right)-\frac{2}{3}x$.

   e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^{x}-2}{3(e^{x}+1)}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)\mathrm{d}x$

2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant e^{-x}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$.

3. La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

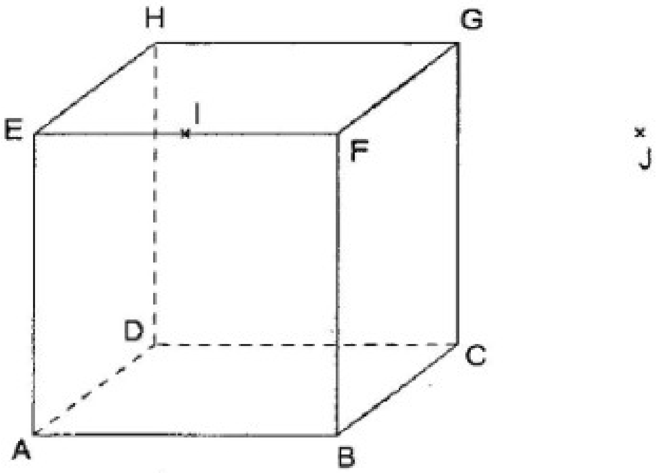
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
   Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur **1. On désig**ne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère ort**honormal** $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
   c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de

   coordonnées $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6}\right)$.

   d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal **direct** $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} i z^2$.
On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

   b) Placer les points A', B' et C'.

   c) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

   a) Déterminer les affixes des points G et G'.

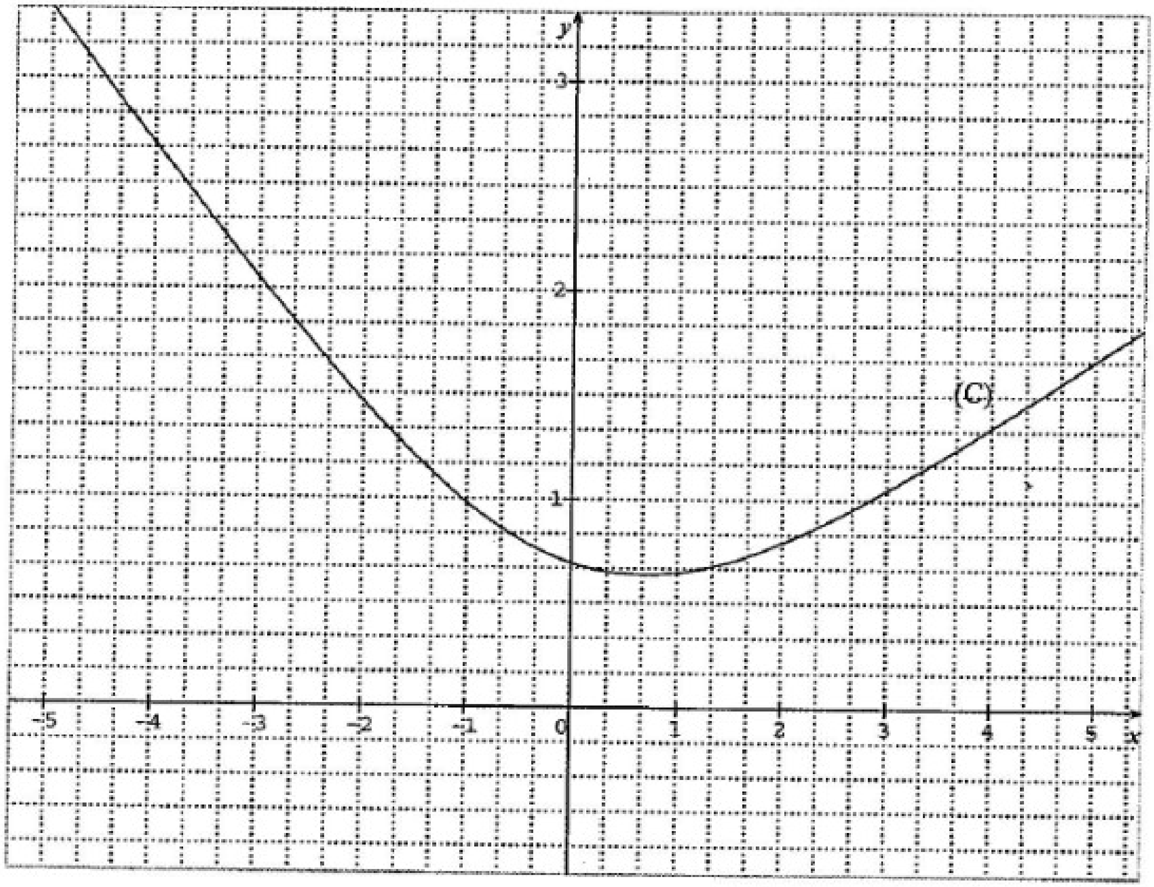
   b) Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 2



9MAOSLI1

EXERCICE 4 (5 points)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009$ (modulo 10000).

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 16).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

   $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1$ (modulo 625).

   b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 625).

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

4) Polynésie juin 2009

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

   b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à $0{,}8942$.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
   Un lecteur MP3 est :
   - commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
   - détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
   - commercialisé sans le logo sinon.

   Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.
   Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

   On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   b) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $A \neq C$ et $A \neq B$

  $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{AB}{AC}$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

- Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :

  $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = iz + 4 + 4i.$$

1. a) Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.

   b) Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.

   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2i$ et $b = -4 + 6i$.

   a) Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

   b) Déterminer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA'], [A'B], [BB'] et [B'A].

   a) Déterminer m. On admettra que $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ et $q = 1 - i$.

   b) Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

   c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$.

   En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

4. Démontrer que les droites (B'A) et (ΩN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1,-1,3)$, $B(0,3,1)$, $C(6,-7,-1)$, $D(2,1,3)$, et $E(4,-6,2)$.

1. a) Montrer que le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ est le point E.

   b) En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$.

2. a) Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

   b) Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

   b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

La courbe (C), donnée en annexe, page 6, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0,+\infty[$.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1, \frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0,1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.
2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la **Partie A** est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b) En déduire les variations de f sur $[0,+\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

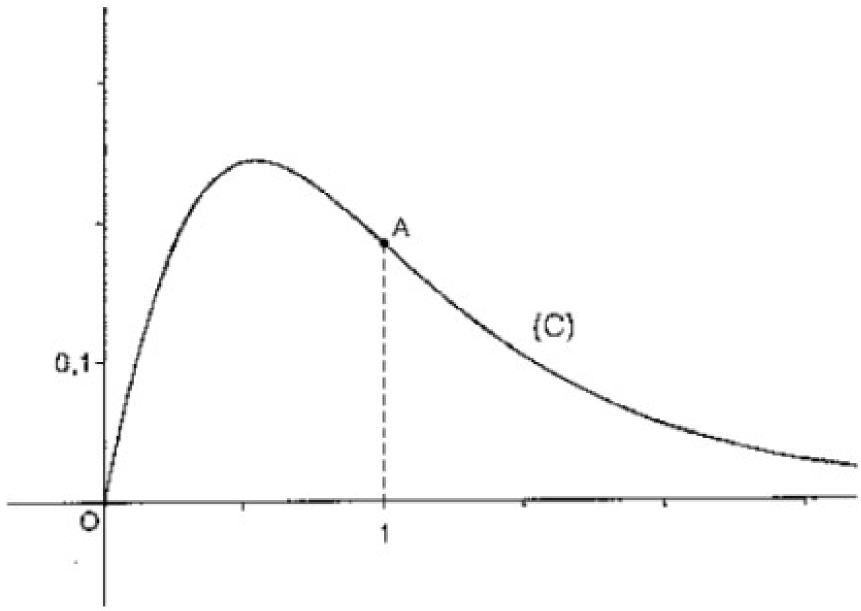
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.

c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.



9MAOSPO1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbf{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z_A = 2\,i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 6\,i$, $z_D = -1 + i$ et $z_E = -3 + 3i$.

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

   a) Donner l'écriture complexe de f.

   b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

   c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

   d) En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ_2) le cercle de diamètre $[AD]$.
   On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).

   a) Déterminer l'image de M par la similitude f.

   b) En déduire la nature du triangle ΩMN.

   c) Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

5) Centres étrangers juin 2009

BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SERIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

9MAOSG11 Page 1 sur 6

Exercice 1 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

1) **Restitution organisée de connaissances** :

Prérequis *:* On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

a) Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

b) Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2) **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « Il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b) Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c) Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(3,4,0)$; $B(0,5,0)$ et $C(0,0,5)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1) Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

2) Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?

3) Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19},\frac{45}{19},\frac{45}{19}\right)$.
   a) Démontrer que les points H, C, I sont alignés.
   b) Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
   c) En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4) Calculs d'aire et de volume.
   a) Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre $OABC$.
   b) Déterminer la distance du point O au plan (ABC).
   c) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1) Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3) Pour tout nombre complexe z, si $|1+\mathrm{i}z|=|1-\mathrm{i}z|$ alors la partie imaginaire de z est nulle.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z+z'|=|z-z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

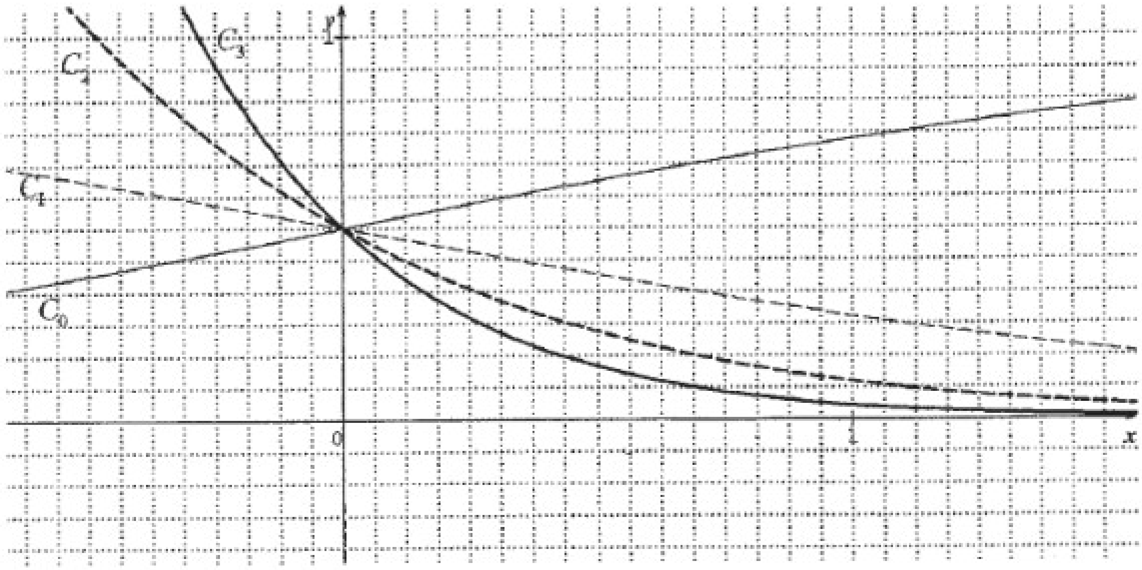
Exercice 4 (*6 points*)
Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel.

On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par : $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes C_0 ; C_1 ; C_2 et C_3 sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes C_n*

1) Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes C_n ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

2) Étude de la fonction f_0

a) Étudier le sens de variation de f_0.

b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbf{R}$.

3) Étude de la fonction f_1

a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

c) Donner une interprétation géométrique de 3.a) pour les courbes C_0 et C_1.

4) Étude de la fonction f_n pour $n\geq 2$

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x)=\frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}.$$

b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbf{R}$.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions* f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1) Calculer u_1, puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2) Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On note (E) l'équation $3x+2y=29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.
   a) Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).
   b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
   c) Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

2) Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées
   L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+2y=29$.
   a) Démontrer que $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   c) Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
   d) Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3) Étude d'une surface.
   $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $4z=xy$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$
   Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathscr{S}$ avec certains plans de l'espace.

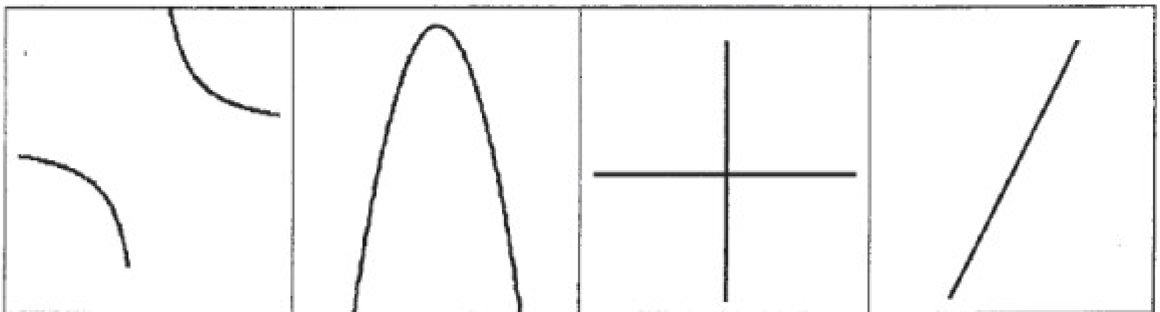


figure n° 1	figure n° 2	figure n° 3	figure n° 4

   a) S_1 désigne la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan (xOy).
      Une des figures données représente S_1, laquelle ?
   b) S_2 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{R}$ d'équation $z=1$.
      Une des figures données représente S_2, laquelle ?
   c) S_3 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y=8$.
      Une des figures données représente S_3, laquelle ?
   d) S_4 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y=29$ de la question 2.
      Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathscr{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation $3x+2y=29$.

6) Asie juin 2009

Exercice 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5% des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5% des paires de chaussettes ont un défaut.

1) On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
b) Calculer la probabilité que la paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.
c) Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.
d) En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.
e) Sachant que la paire de chaussette prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2) L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

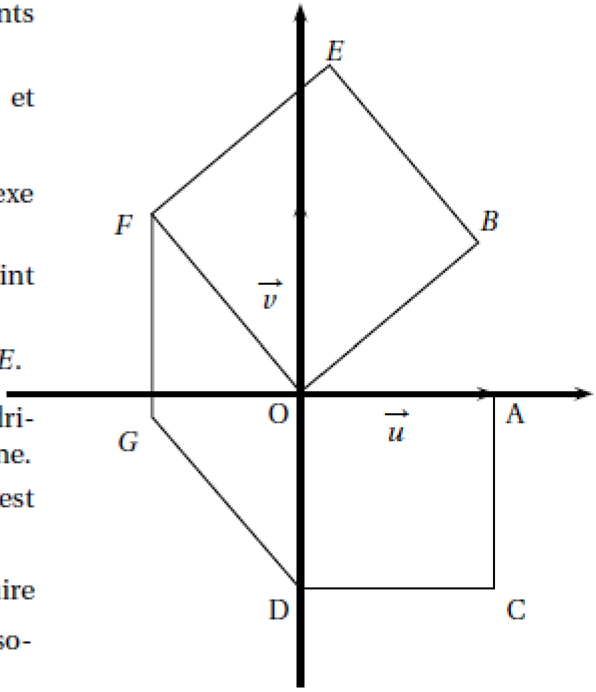
a) Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
b) Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs ODCA et OBEF comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer les affixes c et d des points C et D.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de r.
   b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.
   c. Déterminer l'affixe e du point E.
3. On appelle G le point tel que le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme.
   Démontrer que l'affixe g du point G est égal à $\mathrm{i}(b-1)$.
4. Démontrer que $\dfrac{e-g}{c-g} = \mathrm{i}$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

Exercice 3 : (*6 points*)
Commun à tous les candidats

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$.
3) Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1) Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3) Recherche d'une valeur approchée de α
   a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 4 : (*4 points*)
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont ***une seule*** *est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.*
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1) Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y'+2y=6$ qui vérifie la condition initiale $f(0)=1$ est définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par :

Réponse (1): $f(x)=-2e^{-2x}+3$; **Réponse (2):** $f(x)=-2e^{2x}+3$ **Réponse (3):** $f(x)=-2e^{-2x}-3$

2) Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1): $\{(A,1),(C,2)\}$; **Réponse (2):** $\{(A,1),(B,2),(C,2)\}$ **Réponse (3):** $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$

3) Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x-3y+2z=5$ et le point $A(2,3,-1)$.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point :

Réponse (1): $H_1(3,-1,4)$ **Réponse (2):** $H_2(4,-3,-4)$ **Réponse (3):** $H_3(3,0,1)$

4) Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1): $-\dfrac{\pi}{2}$ **Réponse (2):** $\dfrac{\pi}{4}$ **Réponse (3):** $\dfrac{\pi}{2}$

BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SERIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 : (*5 points*)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relatif solution du système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont deux entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18\,(221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?

b) Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

III. Exercices antérieurs ciblés

A) Questions de recherche

Sujets zéro 2004 exercice 17

On cherche les nombres réels a strictement positifs et les fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant, pour tout x supérieur ou égal à a, la relation $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\ln x$.
Démontrer que le problème posé a une et une seule solution, que l'on déterminera.

Sujets zéro 2004 exercice 18

Soit a un réel strictement positif.

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, rappeler la nature de l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 = a^2$.
2. On pose $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}\,x$. En interprétant $I(a)$ comme une aire déterminer a pour que l'on ait $I(a) = \pi$.

Sujets zéro 2004 exercice 22

Soit (u_n) une suite telle que les suites de terme général $v_n = 1 + u_n$ et $w_n = 3 - u_n$ soient adjacentes. Étudier la convergence de la suite (u_n), et préciser, le cas échéant, sa limite.

Sujets zéro 2004 exercice 25

Soit $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$. On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bj$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que, pour tout élément z de A, $|z|^2$ est un entier.
2. Quels sont les éléments z non nuls de A qui sont tels que $\dfrac{1}{z}$ soit également élément de A ?

Sujets zéro 2004 exercice 30

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 4 cm.
Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle $\mathscr{C}$?

Sujets zéro 2004 exercice 33

Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
Montrer que n^k peut s'écrire comme somme de n entiers impairs consécutifs.

Sujets zéro 2004 exercice 34

Si a et b sont deux entiers strictement positifs, on désigne par $m(a,b)$ le plus petit des deux nombres $\sqrt[a]{b}$ et $\sqrt[b]{a}$ et on considère l'ensemble $A = \{m(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\}$.

Montrer que A est une partie de $\mathbf{R}$ admettant un plus grand élément que l'on déterminera.

Sujets zéro 2004 exercice 35

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $r = (O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

On considère les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives, dans le repère r, $y = \dfrac{5}{4}(x+1)$ et $y = \dfrac{5}{4\mathrm{e}}(x+5)$.

Déterminer des nombres réels x_1 et x_2, avec $x_1 \neq x_2$, et une fonction exponentielle f, c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{kx}$, où C et k sont des constantes réelles, telle que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f soit tangente à Δ_1 au point d'abscisse x_1 et à Δ_2 au point d'abscisse x_2.

Sujets zéro 2004 exercice 36

Établir que pour tout couple (x,y) de nombres réels on a l'inégalité

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|.$$

France juin 2004 exercice 1 (3pts – 36min)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la mcnotonie de la suite (u_n).

2) **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_r > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Antilles juin 2005 exercice 2 (6pts)

1- Démontrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout x de $[0\,;1]$

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leq\frac{1}{x+n}\leq\frac{1}{n}$$

2- a- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx$

2- b- Déduire, en utilisant 1, que :

pour $n\in\mathbf{N}^*$ $\quad \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ (1) $\qquad$ puis que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\leq\dfrac{1}{n}$ (2)

3- On appelle U la suite définie pour $n\in\mathbf{N}^*$ par :

$$U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2- b).

4- On désigne par V la suite de terme général

$$V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1) \text{ où } n\in\mathbf{N}^*$$

Démontrer que V est croissante.

5- Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.

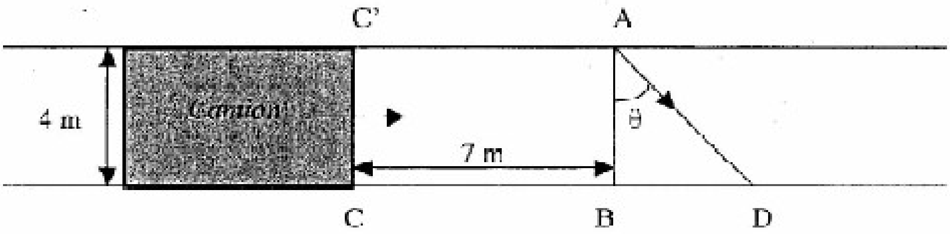
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

Nouvelle Calédonie novembre 2005 exercice 4 (5pts)

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ... 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians)



1°) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2°) On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3°) Conclure.

Rappel : La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

France septembre 2005 exercice 1 *(7pts)*

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f d... ..n repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) Établir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement posit...e α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5) Calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;+\infty[$, vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle : (E') $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E').

c) Conclure.

3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4) La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Polynésie juin 2007 exercice 2 (4pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation : $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$,

   $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.

   Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe 2i.

   a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de 2i tels que : $\arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$.

   b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2\,e^{i\theta}$, θ appartenant à **R**.

4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z - 1}{\overline{z} + 2}$.

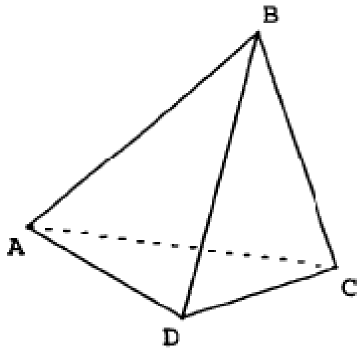
   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

Inde avril 2008 exercice 3 (4pts)

On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB],[CD],[BC],[AD],[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites $(IJ),(KL)$ et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. *a.* Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. *a.* Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Amérique du Nord mai 2008 exercice 3 (spécialité) (5pts)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3; 1;-3)$ et $(-1 ; 1 ; 1)$.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4. a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   b) M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a;b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système (1) : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a;b) = 440 \end{cases}$

   Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a;b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Polynésie juin 2008 exercice 3 (5pts)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

   Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

   Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.
   Sa masse initiale est de 10 kg.
   Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(A) = p(B) = 0,4$ alors $p(A \cup B) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.
   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.
   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 »

Polynésie juin 2008 exercice 4 (7pts)

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,dx \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,dx = \alpha\int_a^b u(x)\,dx+\beta\int_a^b v(x)\,dx$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C ainsi que la droite D d'équation $y=x$ sont données en annexe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0,+\infty[$.
2. a) Montrer que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

   b) Étudier la position de C par rapport à D.
3. Soit I l'intégrale définie par : $I=\int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right)dx=\int_0^1 [f(x)-x]\,dx$. On ne cherchera pas à calculer I.

   a) Donner une interprétation géométrique de I.

   b) Montrer que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $\ln(1+t)\leqslant t$.

   (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\ln(1+t)-t$)

   On admettra que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $\frac{t}{t+1}\leqslant \ln(1+t)$.

   c) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, on a : $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\leqslant \ln\left(1+e^{-x}\right)\leqslant e^{-x}$.

   d) Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)\leqslant I\leqslant 1-e^{-1}$.

   e) En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à C et D.

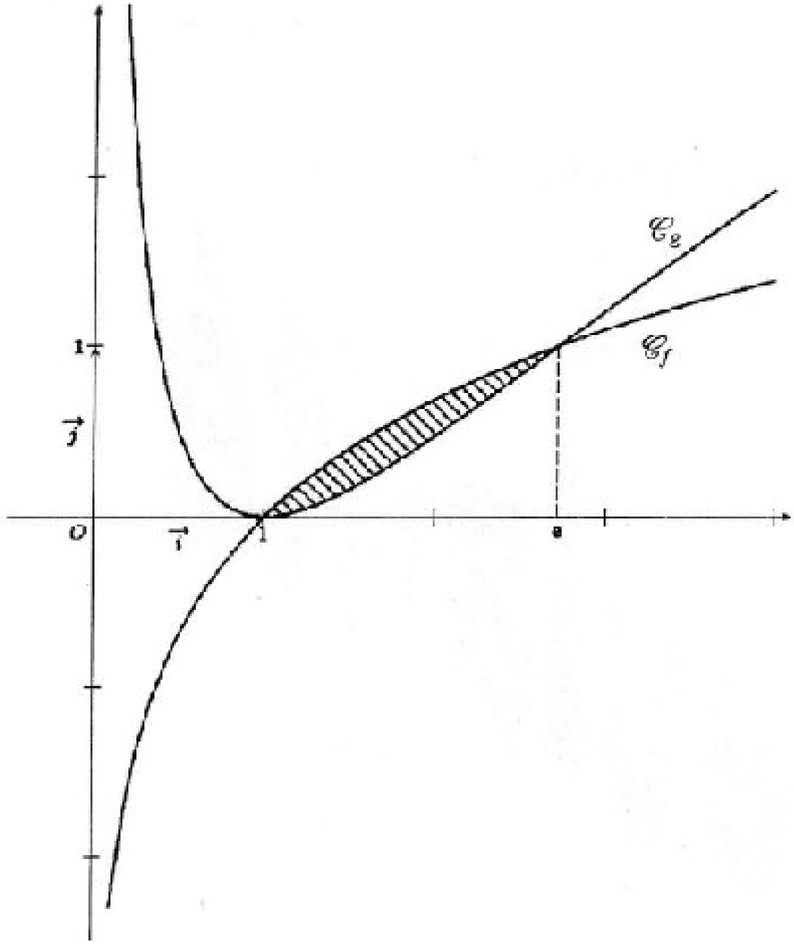
On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

France juin 2008 exercice 1 (5pts)

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1) On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I=\int_1^e \ln x\,dx$ et $J=\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e-2I$.

c) En déduire J.

d) Donner la valeur de A.

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.
Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

France juin 2008 exercice 2 (5pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points
$A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique

est : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

Centres étrangers juin 2008 exercice 2 (5pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$; l'unité graphique est 1cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2+4z+8=0$. On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a=2-2\mathrm{i}$ et $b=-a$. Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

   a) Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   b) On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d=2-6\mathrm{i}$.

   c) Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3) α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α le barycentre du système :

$$\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;\alpha)\}.$$

   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

   b) En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

   c) Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha=D$?

4) On suppose dans cette question que $\alpha=2$.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{2}$.

Centes étrangers juin 2008 exercice 4 (7pts)

I) Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II) Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Étude de la fonction *f*.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction *f*.

3) Éléments graphiques et tracés.
   a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
   c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite (Δ).

III) Calculs d'aires.

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1) On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.
   b) Déterminer la limite l de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$.

Réunion juin 2008 exercice 2 (5pts)

I) Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

1) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

II) Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) Étude de la fonction *f*.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction *f*.

3) Éléments graphiques et tracés.
   a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
   c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite (Δ).

III) Calculs d'aires.

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1) On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$.
   b) Déterminer la limite l de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que $l = A\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

Réunion juin 2008 exercice 4 (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2) a) Justifier que $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a) Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a) Donner l'écriture complexe de h.

b) Calculer $z_A + z_B + z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathscr{C})$?

Asie juin 2008 exercice 4 (7pts)

1h24min

A – Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C – Étude d'une famille de fonctions.

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur R par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

B) Exercices avec application sur calculatrice

Sujets zéro novembre 2003 exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2{,}1e^{x} + 1{,}1x + 1{,}6$$

.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   (a) Sur les variations de la fonction f ?
   (b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2{,}1e^{x} + 1{,}1 \geqslant 0$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
   (c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}05\ ;\ 0{,}15]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Liban juin 2005 exo 3 (8pts)

1h36min

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0;1]$.

   En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R)

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la relation de définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq 0$.
2. a) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel non nul n,

   $(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$

   b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n

   $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

   (On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

C) Exercices faisant appel à des notions de Première

1) Trigonométrie

Asie juin 2004 exercice 2 3) (1pt)

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ». Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
$f(x) = x\sin 3x$	Les solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ sont : 0 ; $\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{18} + 2k'\frac{\pi}{3}$, k et k' sont des entiers relatifs.	

Le barème est le suivant :

- Réponse exacte : 1 point.
- Réponse fausse : $-0,5$ point.
- Absence de réponse : 0 point.
- La note attribuée à l'exercice ne peut être négative.

Asie juin 2007 exercice 1 1) (1pt)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x : $f'(x) = \sin 2x$.

Réunion juin 2005 exercice 1 1) (1pt)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus à une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1) Les suites suivantes sont convergentes :

c) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$

Liban juin 2008 exercice 2 (1pt – 12min)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)z+1=0$.

   Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Sujets zéro 2004 exercice 36

Établir que pour tout couple (x,y) de nombres réels on a l'inégalité

$$|\sin(x)-\sin(y)|\leqslant|x-y|.$$

Sujets zéro 2003 exercice 9

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\cos x+x$.
   En déduire que l'équation $\cos x+x=0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère l'équation (E) $\sin x-\dfrac{x}{2}=0$, $x\in\mathbf{R}$.
   (a) Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.
   (b) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
   (c) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

France septembre 2007 exercice 1 2) (3pts)

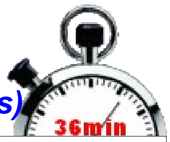
2) On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0)=0$ et $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x)=g(\cos x)$.

a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x)=1$, où h' désigne la dérivée de h.

b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

Amérique du sud novembre 2007 exercice 1 2) (3pts)



2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Determiner la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

France septembre 2007 exercice 4 (4pts)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right[$:

(E) $\quad y' + (1 + \tan x)\,y = \cos x$

(E_0) $\quad y' + y = 1$.

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

France juin 2007 exercice 2 2) (2pts)

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

France septembre 2007 exercice 3 (5pts)

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a) Écrire Z sous forme algébrique .

b) Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

c) En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

d) Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.
Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

e) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

Sujets zéro 2003 exercice 16

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les points :

$$A(2,0,0),\quad B\left(-1,\sqrt{3},0\right)\quad \text{et}\quad C\left(-1,-\sqrt{3},0\right)$$

1. Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.
3. (a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.
   (b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.
   (c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O\,;\,\vec{k}\,)$.
4. Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre $ABCD$ soit régulier et calculer ses coordonnées.
5. Soit M un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in [0,1]$.

   (a) Montrer que $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.
   On définit une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par la relation

   $$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}.$$

   (b) Étudier les variations de la fonction f.
   (c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.
   (d) Quelle est la valeur de ce maximum ?

Antilles-Guyane juin 2007 exercice 2 (5pts)

$\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.
   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.
   c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ sont orthogonaux.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\mathrm{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+\mathrm{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.
   b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.
   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.
   d. Vérifier que $z' - z = \dfrac{1}{2}iz_3$.
   En déduire que $MM' = \dfrac{1}{2}\mathrm{O}M_3$.
3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \dfrac{1}{2}\mathrm{O}M$.
   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\mathrm{O}M}$.

Centres étrangers juin 2006 exercice 1 partie A (2pts)

Partie A. Restitution organisée de connaissances.

> Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
> (i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
> $$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$
> (ii) Pour tous nombres réels a et b :
> $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Amérique du Nord mai 2008 exercice 4 (4pts)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt.$$

1 . a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b) Étudier les variations de la suite (x_n).

c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2 . a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3 . a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul , $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

4 . On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,y_n$.

Polynésie septembre 2005 exercice 4 (5pts)

L'annexe, page 6, se rapporte à cet exercice.

Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ de l'annexe, page 6.
On considère également la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1. a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$, $-\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq \mathrm{e}^{-x}$.

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbf{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

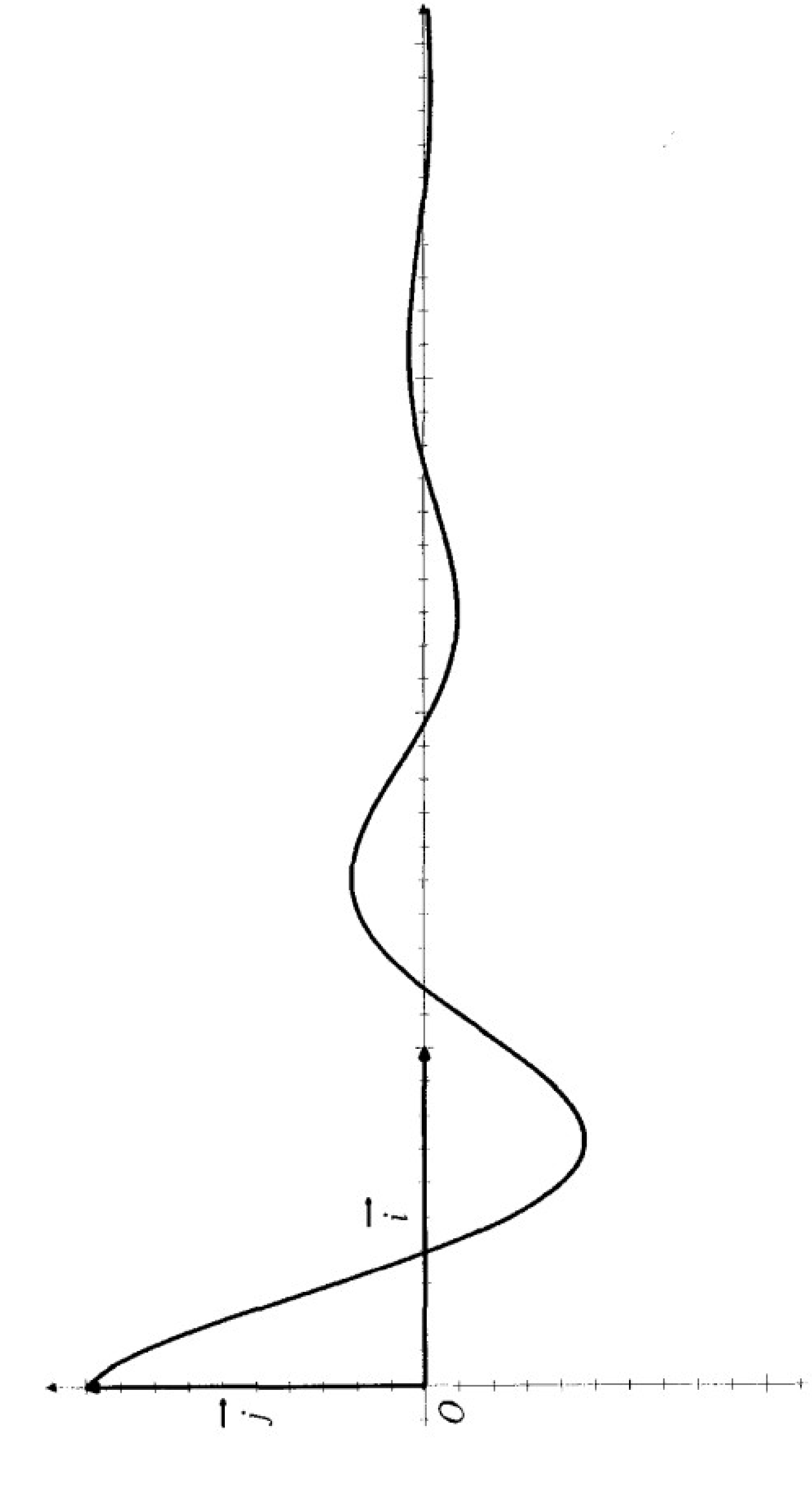
4. a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$,
   $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(4x)+4\sin(4x)\right)$.

   b) En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$, tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

   Compléter le graphique donné en annexe, page 6, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Annexe : exercice 4



2) Barycentres et produits scalaires

Amérique du Nord mai 2004 exercice 1 (3pts)

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(A,1),(B,m),(C,2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\vec{V}_M = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 point, chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment $[CI]$.	
G_1 est barycentre de $\left\{(J,2),\left(C,\frac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\vec{V}_M = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P=G_m$.	

Asie juin 2004 exercice 2 2) (1pt)

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ».
Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A\,;\,-1),\,(B\,;\,1),\,(C\,;\,4)\}$	L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$, est une homothétie de rapport -3.	

Liban juin 2005 exercice 1 6) 7) (1pt)

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

   « Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] »

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

   « L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

France septembre 2005 exercice 2 3) (1pt)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Aucune justification n'est demandée.

3) On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CF}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$. **B :** -3. **C** : $-\sqrt{3}$. **D** : $\frac{3}{2}$.

France septembre 2004 exercice 4 (5pts – 1h)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1) Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\ ;\ -1)$, $(D\ ;\ +1)$, $(B\ ;\ +1)$.

a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\text{i}$.

b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5) Quelle est la nature du triangle AGC ?

Polynésie juin 2004 exercice 2 (5pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

   a. Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

   b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

   c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   d. Soit D le barycentre du système $\{(A,\,1)\,;\,(B,\,-1)\,;\,(C\,;\,1)\}$, calculer l'affixe z_D du point D.

   e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

   a. Montrer que B appartient à Γ_2.

   b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Liban juin 2005 exercice 1 8) (0.5pt)

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan. «Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si M = A ou M = B ».

Polynésie septembre 2004 exercice 3 (6pts)

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher : quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et $(C, 4)$ admettent un barycentre. On le note G.

2. *a.* Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;
   E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».

   b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun de ses côtés » est égale à $\frac{2}{5}$. On pourra faire appel à des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

Nouvelle Calédonie mars 2005 (5pts)

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :
A_1 milieu du segment $[A_0\ B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1)\ ;\ B_0, 2)\}$.
Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1)\ ;\ B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour A_0B_0= 12 cm.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\ \vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
   Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

Polynésie juin 2007 exercice 3 (5pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3},-3,\ 2\right)$ et $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{3},\ 0,-4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).

   a) Calculer les coordonnées de E.

   b) Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|=3\left\|\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

   c) Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).

   En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

   b) Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.

   En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\ 4\sqrt{3}-1\right)$.

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

   b) En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Polynésie juin 2008 exercice 1 (4pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 3 - 2i$, $b = 3 + 2i$, $c = 4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M.

   On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

   b) Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

3) Simulations

France septembre 2005 exercice 4 (3pts)

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les événements suivants :

E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1) Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2) On effectue dix parties identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face i est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2=\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du chiffre i. Le 9^e décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10%, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

France juin 2006 exercice 4 (5pts)

1) Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c) Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0,99$?

2) Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3) Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c) On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	**D_1**	**Q_1**	**Médiane**	**Q_3**	**D_9**	**Maximum**
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,01015

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

Les trois questions sont indépendantes.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0,1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0,000422$; $Q_1 = 0,000582$; Me $= 0,000822$; $Q_3 = 0,001136$; $d_9 = 0,00145$.

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ 0,000456 ☐ 0,00456 ☐ 0,000314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.

Sujets zéro 2003 exercice commun S ES

Un meunier a besoin, pour sa farine, d'un mélange de quatre variétés différentes de grains de blé, d'égales quantités chacunes et notées 1, 2, 3, 4.

1- Il veut savoir si, dans son silo, les différentes variétés sont bien mélangées. Pour cela, il prélève, à la sortie du silo, un échantillon de 100 grains de blé rendus radioactifs par des marqueurs différents selon les variétés. Il obtient les résultats suivants :

Variété	1	2	3	4
Nombre de grains radioactifs	18	27	35	20

Le meunier veut savoir si ces données sont vraisemblables lorsqu'on fait l'hypothèse d'un mélange homogène des quatre variétés, ce qui correspond à un quart des marqueurs pour chaque variété.

On appelle f_i la fréquence dans l'échantillon de la variéte i et on pose $d^2 = 400\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

Calculer la valeur de d^2.

2- On suppose l'équiprobabilité de la présence d'un grain de blé de chaque variété et on simule 10 000 séries de 100 tirages de grains de blé.

Pour chaque série de 100 tirages, on calcule d^2. Le tableau suivant donne le nombre de séries pour lesquelles la valeur de d^2 est strictement supérieure à l'entier j :

j	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre des séries pour lesquelles $d^2 > j$	3915	2618	1715	1114	728	467	306	180

Lire la valeur du 9^e décile, arrondie à l'entier le plus proche, puis celle du 95^e centile.

3- Si l'hypothèse d'équiprobabilité est vraie :

a) Peut-on affirmer avec un risque d'erreur de 10% que le mélange étudié à la question 1 est homogène ?

b) Même question avec un risque d'erreur de 5%.

c) Que peut-on dire si quelqu'un demande un risque d'erreur de 0% ?

IV. Exercices antérieurs complémentaires

A) Probabilités

France juin 2007 - exercice 4

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1) Un représentant de commerce propose un produit à la vente.
Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2.
Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a) 0,4 **b)** 0,04 **c)** 0,1024 **d)** 0,2048

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a) 0,043 **b)** 0,275 **c)** 0,217 **d)** 0,033

3) Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a) 0,100 **b)** 0,091 **c)** 0,111 **d)** 0,25

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{9}{14}$ **c)** $\frac{4}{7}$ **d)** $\frac{1}{3}$

Antilles Guyane juin 2007 - exercice 4

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.
Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.
Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.
Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

0,8 0,5 0,2 0,4 0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

0,2 0,4 0,5 0,6 0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588 0,2487 0,1683 0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000 0,2513 0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$ $\frac{103}{199}$ $\frac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,3679 0,6321

Amérique du Nord mai 2006 - exercice 1

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.
Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué «blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

<u>Question 1</u> : Le jeu est

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

<u>Question 2</u> : Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ B : $\frac{544}{625}$ C : $\frac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

<u>Question 3</u> : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à

A : $\frac{4}{15}$ B : $\frac{11}{30}$ C : $\frac{11}{15}$

EXERCICE 3 *(3 points)*
Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions, chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40% des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1- La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 **b.** 0,75 **c.** $\dfrac{1}{150}$

2- Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 **b.** 0,8 **c.** 0,4

3- La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

a. 1,15 **b.** 0,4 **c.** 0,3

4- La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 **b.** 0,7 **c.** 0,475

5- La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français :

a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** 0,3

6- Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque, la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

Antilles septembre 2004 - exercice 4

Exercice 4 **5 points**

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

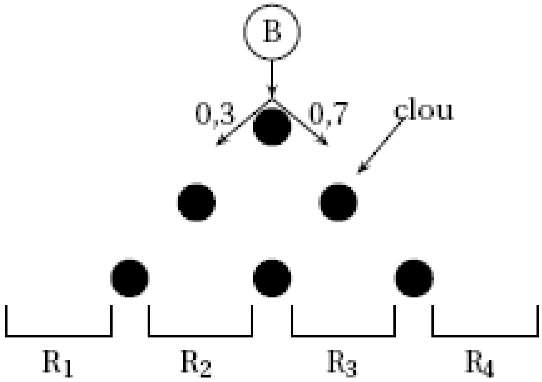
Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que
   - si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
   - le test est positif pour 3 % des personnes saines.

   Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

   ☐ 0,95 ☐ 0,9 ☐ 0,15 ☐ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).
On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
Que valent p_1 et p_2 ?

☐ $p_1 = p_2 = 0,5$ ☐ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$
☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$ ☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$.

EXERCICE 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

*Cet exercice comporte **deux parties indépendantes**.*
*La partie **I** est la démonstration d'un résultat de cours. La partie **II** est un Q.C.M.*

PARTIE II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
*Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève ½ point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie **II** est ramenée à zéro.*

1°) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.
On extrait simultanément trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

A $\frac{75}{512}$ **B** $\frac{13}{56}$ **C** $\frac{15}{64}$ **D** $\frac{15}{28}$

2°) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe?

A $\frac{1}{120}$ **B** $\frac{3}{40}$ **C** $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{4}{30}$

3°) Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

A 2 **B** 13 **C** 16 **D** 17

4°) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$.

On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (avec $\lambda = \frac{1}{6}$)
où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes?

A 0,2819 **B** 0,3935 **C** 0,5654 **D** 0,6065

EXERCICE 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b) $\dfrac{9}{8}$ c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ d) $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a) 0 b) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ c) $\dfrac{23}{128}$ d) $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$ lorsque

a) $m = -1$ b) $m = \dfrac{1}{2}$ c) $m = e^{\frac{1}{2}}$ d) $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a) $1 - \dfrac{1}{e}$ b) $\dfrac{1}{e}$ c) $\dfrac{1}{5e}$ d) $\dfrac{1}{0,2}(e-1)$

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève un demi-point; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A}: \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \text{B}: \frac{3}{120}$$

$$\text{C}: \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad \text{D}: \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\text{A}: 0{,}98 \qquad \text{B}: \frac{0{,}4\times 0{,}95}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}6\times 0{,}02} \qquad \text{C}: 0{,}6\times 0{,}98 \qquad \text{D}: \frac{0{,}6\times 0{,}98}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A}: \mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{B}: \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \qquad \text{C}: 1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{D}: \mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : E $= \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

   a. L'intégrale $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

$$\text{A}: \lambda\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{B}: -t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} \qquad \text{C}: \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda \qquad \text{D}: t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

   b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions A, B ou C est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la répons choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de répons n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1) On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.
   a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :
   A. $\frac{1}{56}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{3!}$.
   b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :
   A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$.

2) On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procèd ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.
   a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :
   A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$.
   b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :
   A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}$ C. $10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$.

3) On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
   R_1 l'événement : « La première boule tirée est rouge » ;
   N_1 l'événement : « La première boule tirée est noire » ;
   R_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
   N_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est noire ».

   a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :
   A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{14}$.
   b) La probabilité de l'événement $R_1 \cap N_2$ est :
   A. $\frac{16}{49}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{15}{56}$.
   c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :
   A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$.
   d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :
   A. $\frac{15}{56}$ B $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 6, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p([0, t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0, t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1) Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t, +\infty[)$ est :

(a) $1 - e^{-\lambda t}$ (b) $e^{-\lambda t}$ (c) $1 + e^{-\lambda t}$

2) La valeur de t pour laquelle on a $p([0, t[) = p([t, +\infty[)$ est :

(a) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (b) $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ (c) $\dfrac{\lambda}{2}$

3) D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

(a) $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ (b) $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ (c) $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4) Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

(a) $p([1, +\infty[)$ (b) $p([3, +\infty[)$ (c) $p([2, 3[)$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0{,}2$.

5) La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

(a) 0,5523 (b) 0,5488 (c) 0,4512

6) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » est :

(a) 0,5555 (b) 0,8022 (c) 0,1607

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a.*, *b.*, *c.*, *d.*
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et sans remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.	*a.* X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$. *b.* $P(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$ *c.* $P(X<5)=1-P(X>5)$ *d.* $E(X)=0{,}75\,n$
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».	*a.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=1{,}01$ *b.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=P(T)$ *c.* $P(T)=2{,}97.10^{-2}$ *d.* Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :	*a.* La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=e^{-0{,}01t}$. *b.* Pour tout réel t positif, $P(Y\leq t)=1-e^{-0{,}01t}$ *c.* La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16. *d.* Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Exercice 1 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 2 parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (QCM), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).

Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

1.1. Donner la loi de probabilité de N.

1.2. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

2. A un concours un candidat doit répondre à un QCM de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au QCM proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. **Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie** pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

<u>Réponse 1</u> :	<u>Réponse 2</u> :	<u>Réponse 3</u> :
180	330	110

b. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$p(A)=0,4$ $\quad p(B)=0,5$ $\quad p(\overline{A\cup B})=0,35$

Combien vaut $p(A\cap B)$?

<u>Réponse 1</u> :	<u>Réponse 2</u> :	<u>Réponse 3</u> :
$p(A\cap B)=0,1$	$p(A\cap B)=0,25$	Les données sont insuffisantes pour répondre

c. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$p(B\cap A)=\frac{1}{6}$ $\quad p_A(B)=\frac{1}{4}$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé).

Combien vaut $p(A)$?

<u>Réponse 1</u> :	<u>Réponse 2</u> :	<u>Réponse 3</u> :
$p(A)=\frac{2}{3}$	$p(A)=\frac{1}{24}$	$p(A)=\frac{1}{12}$

d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

<u>Réponse 1</u> :	<u>Réponse 2</u> :	<u>Réponse 3</u> :
$\sigma=\frac{3}{2}$	$\sigma=\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma=2$

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justificatior de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomple ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) = 0,4$ alors $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».

Liban juin 2004 - exercice 1 (4pts)

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratifs ou techniques).
12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.
67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. *On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.*

   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

   c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT. En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0\ ;\ 1]$.
   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15mn et 20mn?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

B) Géométrie dans l'espace

France juin 2006 - exercice 1

EXERCICE 1 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points $A(2,4,1)$, $B(0,4,-3)$, $C(3,1,-3)$, $D(1,0,-2)$, $E(3,2,-1)$, $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

5) Le point I est sur la droite (AB).

Amérique du Nord mai 2007 - exercice 1

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
Soit A le point de coordonnées (1, 11, 7).

Proposition 1 :
« le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées (0, 2, 1) ».

Amérique du sud novembre 2006 - exercice 1

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, ,on considère les points :

A de coordonnées $(3 ; 1 ; -5)$, B de coordonnées $(0 ; 4 ; -5)$, C de coordonnées $(-1 ; 2 ; -5)$ et D de coordonnées $(2 ; 3 ; 4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect.*
L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x &= 1 - 2k \\ y &= \dfrac{7}{2} + k \\ z &= -\dfrac{1}{2} - 9k \end{cases}$.

   $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbf{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t, t \in \mathbf{R} \\ z = 3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbf{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4 ; 0 ; 0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5} ; \frac{-9}{5} ; \frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9} ; \frac{-2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11} ; \frac{-25}{11} ; \frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.
L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point $I(1 ; -5 ; 0)$ **B** : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$ **D** : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

Polynésie juin 2006 - exercice 2

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(0\,;0\,;2)$ $\mathrm{B}(0\,;4\,;0)$ et $\mathrm{C}(2\,;0\,;0)$.
On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\frac{4}{9}\,;\frac{8}{9}\right)$

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 2t \\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})\text{ ».}$$

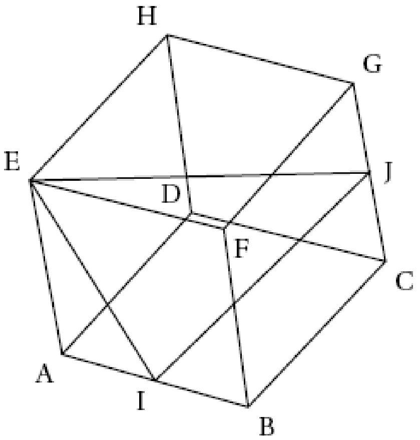
Amérique du sud novembre 2005 - exercice 3

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube ABCDEFGFI, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 affirmations suivantes.



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=AB\times IC\times\cos\frac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&t+1\\y&=&2t\\z&=&t\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{1}{2}t+1\\y&=&t+1\\z&=&\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3.	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ plan $\mathscr{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : $2\sqrt{3}$

Nouvelle Calédonie novembre 2006 - exercice 4

EXERCICE 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère :

- les points $A(0;0;3)$, $B(2;0;4)$, $C(-1;1;2)$ et $D(1;-4;0)$
- les plans $(P_1) : 7x+4y-3z+9=0$ et $(P_2) : x-2y=0$.
- les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs :

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \\ z=-10+5t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a)	b)	c)	d)
1) Le plan (P_1) est :	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2) La droite (Δ_1) contient :	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3) Position relative de (P_1) et de (Δ_1) :	(Δ_1) est strictement parallèle à (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4) Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2) :	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires
5) L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est :	$\begin{cases} x=t \\ y=-2+\frac{1}{2}t \\ z=3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x=5t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère la droite (D) passant par $A(0;0;3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1;0;-1)$ et la droite (D') passant par $B(2;0;4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(0;1;1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D'), de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D'), définis par $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM'}=b\vec{v}$, où a et b sont des nombres réels . Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') si et seulement si le couple $(a;b)$ est solution du système :
$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=-1 \end{cases}$$
3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D'). Montrer que $HH'=\sqrt{3}$ unités de longueur.
4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D').
   (a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1., démontrer que
   $$MM'^2=(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3$$
   (b) En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H'.

DEUXIEME EXERCICE *(5 points)*

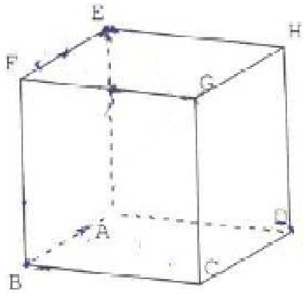
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe (page 4/4). Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent ½ point.



Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1.

On choisit le repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].

L est le barycentre de $\{(A,1);(B,3)\}$.

Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$

1) Les coordonnées de L sont :

a) $\left(\frac{1}{4} ; 0 ; 0\right)$ ☐ *b)* $\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$ ☐ *c)* $\left(\frac{2}{3} ; 0 ; 0\right)$ ☐

2) Le plan (π) est le plan

a) (GLE) ☐ *b)* (LEJ) ☐ *c)* (GFA) ☐

3) Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées

a) $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{4}\right)$ ☐ *b)* $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{5}\right)$ ☐ *c)* $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$ ☐

4)

a) Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B. ☐

b) Les droites (EL) et (IM) sont parallèles. ☐

c) Les droites (EL) et (IM) sont sécantes. ☐

5) Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :

a) $\frac{1}{36}$ ☐ *b)* $\frac{1}{48}$ ☐ *c)* $\frac{1}{24}$ ☐

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des 5 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3, 1, 3) et B(−6, 2, 1).

Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ est :

(a) un plan de l'espace (b) une sphère (c) l'ensemble vide

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

(a) $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$ (c) $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

(a) coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle

(b) est tangente au plan $\mathscr{P}$

(c) ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, -1)$

et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbf{R})$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

(a) coplanaires et parallèles (b) coplanaires et sécantes (c) non coplanaires

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

(a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-t \\ y=\frac{3}{2}-7t \\ z=2+t \end{cases} \quad (t\in\mathbf{R})$

(b) le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$

(c) le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$

EXERCICE 4 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions **1, 2, 3** *et* **4**, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses***. *Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée.*
Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point.
Toute réponse juste rapporte 0,5 point.
Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

a) La distance du point O au plan P est égale à 1.

b) La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

c) Le vecteur $\vec{n}\,(1, \frac{3}{2}, 2)$ est un vecteur normal au plan P.

d) Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2) On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1, 1, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, -4, -2)$.

a) La droite D est parallèle au plan P.

b) La droite D est orthogonale au plan P.

c) La droite D est sécante avec le plan P.

d) Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

3) On désigne par E l'ensemble des points M (x, y, z) tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$.
Soit le point A (1, 1, 1).

a) L'ensemble E contient un seul point, le point A.

b) L'ensemble E est une droite passant par A.

c) L'ensemble E est un plan passant par A.

d) L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, -3, 2)$.

4) ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a) Le plan P contient toujours le point D.

b) Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c) Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.$$

d) Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

Exercice n° 8 (enseignement obligatoire)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification.

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace.
   L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

   a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère

2. On considère les points $E(0\,;1\,;-2)$ et $F(2\,;1\,;0)$.
   Les coordonnées du barycentre G de $(E\,;1)$ et $(F\,;3)$ sont :

   a) $G(6\,;4\,;-2)$ b) $G(1{,}5\,;1\,;-0{,}5)$ c) $G(0{,}5\,;1\,;1{,}5)$

3. Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t\,;\ y = 3t\,;\ z = -3,\quad t \in \mathbf{R}$.
   On considère les points $A(2\,;3\,;-3)$, $B(2\,;0\,;-3)$ et $C(0\,;6\,;0)$. On a :

   a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives
   $x = 2 + t\,;\ y = 1 - t\,;\ z = 1 + t,\quad t \in \mathbf{R}$,
   $x = -t'\,;\ y = -2 - 1{,}5\,t'\,;\ z = 3 + t',\quad t' \in \mathbf{R}$
   admettent comme point commun :

   a) $I(3\,;0\,;2)$ b) $J(2\,;1\,;1)$ c)$K(0\,;2\,;-3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $x = 1\,;\ y = 1 + 2t\,;\ z = 1 + t,\quad t \in \mathbf{R}$,
   $x = 3 - 2t'\,;\ y = 7 - 4t'\,;\ z = 2 - t',\quad t' \in \mathbf{R}$
   sont :

   a) parallèles b) sécantes c) non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t\,;\ y = 1 + 3t\,;\ z = 2 + 2t,\quad t \in \mathbf{R}$
   et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

   a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

   a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \dfrac{3t}{2} \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

On note A le point de coordonnées $(2,-1,1)$, B le point de coordonnées $(4,-2,2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. **Proposition 1**

   « La droite (d) est parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j}\,)$ ».

2. **Proposition 2**

   « Le plan P d'équation $x+3z-5=0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. **Proposition 3**

   « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; -1), (B ; 1) et (C ; 1).

   Proposition 4

   « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».

5. **Proposition 5**

   « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x+3z-5=0$ ».

20min

Exercice 2 (5 points)

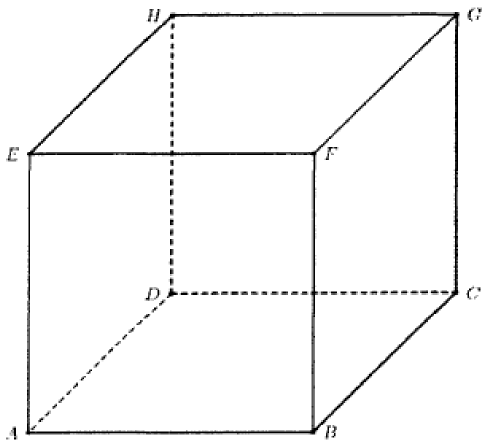
Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie B

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, représenté ci-dessous.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



48min

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points : $A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;-2;3)$, $D(1;1;-2)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-2y+z+1=0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** *ou* **FAUX** *correspondant à la réponse choisie.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1) Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.

2) Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x+8y-z-11=0$.

4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x=2k \\ y=2+3k \\ z=3-4k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.

5) Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

6) Affirmation 6 : la distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$.

7) Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathscr{P}$.

8) Affirmation 8 : le point $E\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 1 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

A – Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

- $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
- *L'écriture* $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ *signifie que les plans* $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$.

3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{D}$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$,
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

EXERCICE 3 — **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ;
une réponse inexacte enlève 0,25 point ;
l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$ est :

   Réponse A : l'ensemble vide — **Réponse B :** une droite
   Réponse C : un plan — **Réponse C :** réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= -1+t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z &= 2-3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x &= 2+t' \\ y &= -2-t'\ (t'\in\mathbb{R}) \\ z &= 4+2t' \end{cases}$ sont :

   Réponse A : parallèles et distinctes — **Réponse B :** confondues
   Réponse C : sécantes — **Réponse C :** non coplanaires

3. La distance du point $A(1;-2;1)$ au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

   Réponse A : $\dfrac{3}{11}$ — **Réponse B :** $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
   Réponse C : $\dfrac{1}{2}$ — **Réponse C :** $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4. Le projeté orthogonal du point $B(1;6;0)$ sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

   Réponse A : $(3\,;1\,;5)$ — **Réponse B :** $(2\,;3\,;1)$
   Réponse C : $(3\,;0\,;2)$ — **Réponse C :** $(-2\,;3\,;-6)$

C) Nombres complexes

Amérique du Nord juin 2005 - exercice 1

EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i$, $-3-i$ et $2{,}08+1{,}98i$. Le triangle ABC est :
   (a) : isocèle et non rectangle **(b) :** rectangle et non isocèle
   (c) : rectangle et isocèle **(d) :** ni rectangle ni isocèle

2. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$ est :
   (a) : un cercle de rayon 1 **(b) :** une droite
   (c) : une droite privée d'un point **(d) :** un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
   (a) : un cercle **(b) :** une droite
   (c) : une droite privée d'un point **(d) :** un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i.
   L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :
   (a) : $z' = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})\,z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ **(b) :** $z' = (-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})\,z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$
   (c) : $z' = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})\,z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ **(d) :** $z' = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})\,z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\mathrm{i}$.

B : $z^{14} = 64 - 64\mathrm{i}$.

C : $z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$.

D : $z^{14} = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4\mathrm{i}|$.

A : (E) est la médiatrice du segment [ST].

B : (E) est la droite (ST).

C : (E) est le cercle de centre Ω, d'affixe $3 - 4\mathrm{i}$, et de rayon 3.

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

Antilles juin 2004 - exercice 3

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

$A : 2\sqrt{2}$ $\quad B : 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$ $\quad C : 2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ $\quad D : 2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ B : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ C : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ $\quad$ D : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

A : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ $\quad$ B : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ $\quad$ C : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ $\quad$ D : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\dfrac{7\pi}{8}$ $\quad$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ $\quad$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ $\quad$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

Centres étrangers juin 2006 - exercice 1

Exercice 1 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.

2) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.

3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.

4) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z = x + iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$, alors :	$BC = 2\,AC$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA^2$	☐ Faux ☐ Vrai

Polynésie septembre 2005 - exercice 3

Exercice 3 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Son affixe z vérifie :

(a) $|z-2+5i|^2=3$

(b) $|z+2-5i|^2=3$

(c) $|z-2+5i|=3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

(a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

(b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB]

(c) M est l'orthocentre du triangle ABC

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4 i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

(a) $|z_G-3-2{,}5i|=\dfrac{5}{6}$

(b) $z_G-(1+i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$

(c) $z_G-(3+2{,}5i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2\text{i}$. L'écriture algébrique de z est :

   ☐ $\frac{8}{3} - 2\text{i}$ ☐ $-\frac{8}{3} - 2\text{i}$ ☐ $\frac{8}{3} + 2\text{i}$ ☐ $-\frac{8}{3} + 2\text{i}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}\,y$ vérifiant $|z - 1| = |z + \text{i}\,|$ est la droite d'équation :

   ☐ $y = x - 1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$ ☐ $y = x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

   ☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☐ $3k$ ☐ $6k$

   (avec k entier naturel)

4. Soit l'équation (E) : $z = \frac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

   ☐ $-2 - \sqrt{2}\text{i}$ ☐ $2 + \sqrt{2}\text{i}$ ☐ $1 - \text{i}$ ☐ $-1 - \text{i}$

5. Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \text{i}$ et $z_B = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$. L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ est :

   ☐ $-\text{i}$ ☐ 2i ☐ $\sqrt{3} + \text{i}$ ☐ $\sqrt{3} + 2\text{i}$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}\,y$ vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z + 2}{z - 2\text{i}}\right) = \frac{\pi}{2}$ est inclus dans :

   ☐ La droite d'équation $y = -x$
   ☐ Le cercle de centre $I(1 + \text{i}\,)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
   ☐ La droite d'équation $y = x$
   ☐ Le cercle de diamètre $[AB]$, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2\text{i}$.

EXERCICE 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :

a) 3 b) i c) $3 + i$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ b) $|z - 1|$ c) $|i\overline{z} + 1|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 3$ b) $n = 6k + 3$ avec k entier relatif c) $n = 6k$ avec k entier relatif

5. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) la droite (AB) b) le cercle de diamètre $[AB]$ c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :

a) $1 - 4i$ b) $-3i$ c) $7 + 4i$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z - 2}{z - 1} = z$ est :

a) $\{1 - i\}$ b) L'ensemble vide c) $\{1 - i, 1 + i\}$

Liban juin 2008 - exercice 2

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

   Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right|=1$.

   Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z+1=0$.

   Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Exercice 1 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On considère les points A et Ω d'affixes respectives : $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

I. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

II. On note b, c, et d les affixes respectives des points B, C et D.
Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.
Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$\lvert a-\omega\rvert =$	2	4	$\sqrt{3}-i$
2.	$\arg\,(a-\omega) =$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}\right) =$	$\arg\,((\omega-c)i)$	$\left(-\vec{v},\overrightarrow{\mathrm{C}\Omega}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\frac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2i$

5.	$\frac{b-d}{a-d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
6.	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega}$.	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	l'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$